

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.
משך המבחן: שלוש שעות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2(x)) \cdot e^{\sin(x)}}{x \cdot \ln(1+x)} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x+1} \quad \text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{3^{4n+1}}$$

2.

א. חשבו את $\int \frac{\cos(x)}{\sin^4(x) + \sin^2(x)} dx$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^1 \ln(x) dx$, אם כן חשבו אותו.

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^3 + x = 1$, והוכיחו תשובתכם.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x^3 + x + \cos(x) = 1$, והוכיחו תשובתכם.

4. (אין קשר בין הסעיפים)

א. תהי פונקצית דיריכלה $D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

תהי f פונקציה כלשהי המקיימת לכל $x \in \mathbb{R}$ כי $f(x) = f(D(x))$.
הוכיחו כי f פונקציה קבועה.

ב. תהיינה f, g גזירות ב $[0, \infty)$ כך ש $f(0) = g(0)$ ולכל $x \in [0, \infty)$ מתקיים כי $f'(x) > g'(x)$.
הוכיחו כי לכל $x \in (0, \infty)$ מתקיים $f > g$.

5. תהי סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ ותנאי ההתחלה $a_1 > 0$

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

ב. חשבו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$

ב. חשבו את $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ עד רמת דיוק של $h = 0.01$.