

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.  
משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{2x} - 1)^7 (\ln(e+x))^2}{(\sin(3x))^3 (1 - \cos(x))^2}$  .  
 ב.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot \sin(\sqrt{x^2 + 1} - x))$  .  
 ג.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$  .

2.

א. חשבו את  $\int x \ln(x) dx$  .

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx$  .

3. נביט בפונקציה  $f(x) = x + \frac{x}{e^x}$  .

א. הוכיחו שלכל  $a \in \mathbb{R}$  קיים פתרון למשוואה  $f(x) = a$  .

ב. הוכיחו שלכל  $a \in \mathbb{R}$  קיים פתרון יחיד למשוואה  $f(x) = a$  .

4.

א. תהי  $f$  גזירה בקטע  $A$  המקיימת לכל  $x \in A$  כי  $|f'(x)| \leq 1$  .

הוכיחו כי לכל שני מספרים  $x_1, x_2 \in A$  מתקיים כי  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$  .

ב. תהיינה שתי סדרות  $a_n, b_n$  כך ש  $a_n - b_n \rightarrow 0$  .

הוכיחו כי  $\arctan(a_n) - \arctan(b_n) \rightarrow 0$  .

5. תהי סדרה  $a_n$  המקיימת את נוסחת הנסיגה  $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1$  .

א. הוכיחו כי  $a_n$  מונוטונית עולה.

ב. חשבו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  .

6.

א. חשבו את גבול הסדרה  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^9}{n^{10}}$  .

ב. נסמן ב  $R_n$  את השגיאה של קירוב של  $\sin(2)$  על ידי פולינום טיילור מסדר  $n$  של הפונקציה

$f(x) = \sin(x)$  (סביב הנקודה 0). הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$  .