

מבוא לתורת החבורות 211-88 סמסטר א', מועד א, תש"ף

מרצה: יונתן בק

תאריך: 6.2.20

המבחן: שלוש שעות, ללא חומר עזר.

הוראות: ענה על כל השאלות. כל שאלה שווה 20 נקודות. כל פתרון חייב להופיע בדף/ים נפרדים במחברת. סמן מספר השאלה בראש כל דף. יש לרשום תשובות מנומקות. בהצלחה!!

1.

- א. תהי H תת-חבורה של G עם בדיוק שני קוסטים שמאליים. הוכח ש $g^2 \in H$ לכל $g \in G$.
- ב. הוכח ש A_4 היא חבורה מסדר 12 ללא תת-חבורות מסדר 6.
- ג. האם A_4 חבורה פשוטה? הצדק את תשובתך.

2. בשאלה הבאה מצא את התת-חבורה המרכז המבוקש על ידי מציאת האיברים בה.

- א. יהי $g = (123) \in S_4$. מצא את $C_{S_4}(g)$.
- ב. יהי $g = (123) \in S_5$. מצא את $C_{S_5}(g)$.

3.

- א. תהי G חבורה מסדר pq ו $q > p$ כך ש $q \equiv 1 \pmod{p}$. הוכח ש G ציקלית מסדר pq .
- ב. תהי G חבורה מסדר 57 שאינה ציקלית. כמה איברים מסדר 3 יש ב G ?

4. תהי G חבורה. נגדיר פונקציה $f: G \rightarrow G$ על ידי $f(g) = g^2$.

- א. הוכח שהפונקציה f היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.
- ב. נניח שהחבורה G אבלית וסופית. הוכיחו שהפונקציה f היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של G הוא אי-זוגי.

5. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

- א. כל תת-חבורה נורמלית היא אבלית.
- ב. כל תת-חבורה אבלית היא נורמלית.
- ג. התמונה של כל הומומורפיזם $f: G \rightarrow H$ היא תת-חבורה נורמלית של H .
- ד. אם חבורת המנה G/N היא סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.
- ה. אם חבורת המנה G/N היא ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.