

אלגברה ליניאר / סיכור 1

מ'לץ יחידו - רובינסון - $elijahm@math.biu.ac.il$

ספרים - אלגברה ליניאר / אישור חזקו שיום,

- אלגברה ליניאר / האוניברסיטה הפתוחה

רדיו רנ"ן 604/כ"ג 62

רנ"ן 604/כ"ג 11 אינאר

מקראו מראש

N - סולם המספרים הטבעיים $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Z - המספרים השלמים $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Q - מספרים רציונליים $\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \}$

R - מספרים ממשיים

C - מספרים מרוכבים

סיומ

ϵ - ש"ק, $\epsilon \in Z$ (איבר ש"ק הקטור)

$\frac{1}{2} \notin N$ - לא ש"ק

$N \subseteq Z$ - הכלה של קבוצה

$Z \subsetneq Q, R \subsetneq C$ - מוכל ממעט, $Q \subsetneq R$

הכלות - $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

קבוצות

$A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \subset B, A \subseteq B$

$B \subset C, C \subseteq B$

~~$B \subset C, C \subset B$~~

סיומ

$A - B$

$E - L$

לכונת שנייה

1. לכונת 1: יהי F שדה, $a, b, c \in F$ אז

$$a+b=c+b \quad \text{1. גורם}$$

$$\Downarrow$$

$$a=c$$

$$(c \neq 0) \quad a \cdot c = b \cdot c \quad \text{2. גורם}$$

$$a=b$$

2. אז $a \in F$ אז $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

לכונת 2

1. לכונת 1: יהי $a, b, c \in F$ שדה

$$a+b=c+b \quad \text{1. גורם}$$

קיים $-b \in F$ כך ש $-b+b=0$ (כיון $-b \in F$)

$$(a+b)+(-b)=(c+b)+(-b)$$

נכון $a+(b+(-b))=c+(b+(-b))$

$$a+0=c+0$$

$$a=c$$

$$c \neq 0 \quad a \cdot c = b \cdot c \quad \text{2. גורם}$$

$c \in F, c \neq 0$ קיים $c^{-1} \in F$ כך ש $c \cdot c^{-1} = 1$ אז

$$(a \cdot c) \cdot c^{-1} = (b \cdot c) \cdot c^{-1}$$

לפי אסוציאטיביות

$$a \cdot (c \cdot c^{-1}) = b \cdot (c \cdot c^{-1})$$

$$a \cdot 1 = b \cdot 1$$

1 נייטרלי הכפל ונכון

$$a=b$$

$$0+0=0$$

$$(0+0) \cdot a = 0 \cdot a$$

$$0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a \Rightarrow 0 \cdot a = 0$$

הערה: יהי G קבוצה נ"מ, $a, b \in G$, $a \cdot b \neq e$ כן

$$a \cdot b = 0 \quad \text{אם } N \text{ ק"מ}$$

$$\boxed{\text{אם } a, b = e \text{ הם } N \text{ ק"מ, אז}}$$

$$\boxed{\text{אם } a \neq 0 \text{ אז } a^{-1} \text{ ק"מ}}$$

(בונה ד,)

$$a \cdot b = 0 \quad \text{אם } N \text{ ק"מ} \quad \text{אם } a = 0 \quad \text{אם } b = 0$$

הוכחה:

$$a \cdot a^{-1} = e \quad \text{כך } a^{-1} \in N \text{ ק"מ}$$

$$a \cdot b = 0 \quad / \cdot a^{-1}$$

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0 \cdot a^{-1}$$

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0 \quad \text{אם } a \text{ אינו } 0$$

$$1 \cdot b = 0$$

$$b = 0$$

הערה: מספר $p \in \mathbb{N}$ הוא ראשוני אם $p \neq 1$ ולא ניתן לפרוקו כמכפלה $m \cdot n$

כאשר $m, n > 1$

דוגמאות: 3, 5, 7, 11, ...

הערה: יהי $p \in \mathbb{N}$ מספר ראשוני, נגדיר את $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$

$$\text{אם } n \text{ אינו } p \text{ אז } n \text{ אינו } p \text{ אז } n \text{ אינו } p$$

$$\text{אם } n = p \cdot m + r \quad \text{אם } r < p$$

$\Downarrow$

$$n \bmod p = r$$

$$7 \bmod 3 = 1$$

$$7 \bmod 5 = 2$$

דוגמאות:

$$n \oplus m = (n + m) \bmod p \quad \text{נדד'ר:}$$

$$n \odot m = (n \cdot m) \bmod p$$

$\mathbb{Z}_p$ בעולם אולי נדד'ר אר

$$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2\}, \quad p = 3 \quad \text{נדד'ר:}$$

$$n \oplus m = (n + m) \bmod 3$$

$$n \odot m = (n \cdot m) \bmod 3$$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

נגן ארמאט מהלכה פלוס דבריה:

1. מולדיות

2. גוק הגילוי

$$1 + 2 = 0$$

3. ארם אמת ק"ם נלדי

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

נגן ארמאט מהלכה:

1. מולדיות

2. גוק הגילוי

3. ק"ם של אמת הופכי וק $2 \cdot 2 = 1, 1 \cdot 1 = 1$ ארם $\alpha \in \mathbb{Z}_p, \alpha \neq 0$ ק"ם הופכי ארם.

הכונת $\mathbb{Z}_p$

1. יחידות נייטרליות:

$$0 \oplus a = (0+a) \bmod p = a \quad a \in \mathbb{Z}_p \text{ לכל } 0 \in \mathbb{Z}_p \text{ איבר נייטרלי}$$

$$1 \odot a = (1 \cdot a) \bmod p = a \quad a \in \mathbb{Z}_p \text{ לכל } 1 \in \mathbb{Z}_p \text{ איבר נייטרלי}$$

2. תכונות אברהם (קומוטטיביות):

$$a \oplus b = b \oplus a \Rightarrow (a+b) \bmod p = (b+a) \bmod p$$

$$a \odot b = b \odot a \quad (a \cdot b) \bmod p = (b \cdot a) \bmod p$$

$$-a = \begin{cases} p-a & a \neq 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases} \quad \text{3. } \underline{\text{לכל } a \in \mathbb{Z}_p \text{ קיים } -a \text{ (איבר הפוך)}}:$$

$$\begin{aligned} a \oplus (p-a) &= (a + (p-a)) \bmod p = \\ &= (a + (-a + p)) \bmod p = \\ &= ((a + (-a)) + p) \bmod p = \\ &= (0 + p) \bmod p = \\ &= p \bmod p = 0 \end{aligned}$$

נניח $p=4$ כלומר p אינו ראשוני. $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1



$2 \oplus 2 = 0$ ולכן קיימת סיון מולטיפליקטיבי. $\mathbb{Z}_4$ אינו עזר.

ל-2 אין הפוך ב- $\mathbb{Z}_4$.



משפט: $\mathbb{Z}_p$ עזר $\iff p$ ראשוני

$\mathbb{Z}_p$, p ראשוני נקרא $\mathbb{Z}_p$ שדה גלוי, כלומר יש בו הפוך לכל איבר (אי-אפס).

הערה: $\mathbb{Z}_p$ מתקן היחס הפעולה בו p אינו תלוי זה החלקים של p .

דוגמאות:

$$7 \bmod 3 = 1 \quad \mathbb{Z}_3$$

$$(4 \cdot 5) \bmod 11 = 9 \quad \mathbb{Z}_{11}$$

$$(7 \cdot 8) \bmod 11 = 1$$

$$\left(\frac{1}{7}\right) \bmod 11 = (7^{-1}) \bmod 11 = 8$$

$$(9 \cdot 5) \bmod 11 = 1 \quad \text{כי} \quad \left(\frac{1}{5}\right) \bmod 11 = 9$$

$$\left(\frac{5}{7}\right) \bmod 11 = (5 \cdot 7^{-1}) \bmod 11 = (5 \cdot 8) \bmod 11 = 7$$

הדפדפה: $\mathbb{F} = \langle \mathbb{F}, +_{\mathbb{F}}, \cdot_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}} \rangle$ הוא H - תת-מערכת של $\mathbb{F}$.

אם $\mathbb{F}$ הוא שדה:

$$\emptyset \neq H \subseteq \mathbb{F} \quad 1$$

$$H = \langle H, +_{\mathbb{F}}, \cdot_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}} \rangle \quad 2$$

קורולר:

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

↑
מערכת

אם $\mathbb{Z}_5$ הוא מערכת של $\mathbb{Z}_7$ כי $\mathbb{Z}_5$ הוא מערכת של $\mathbb{Z}_7$.

משפט קרסלמן:

$$\mathbb{F} = \langle \mathbb{F}, +, \cdot, 0, 1 \rangle \quad \text{הוא}$$

אם $\mathbb{F}$ הוא שדה, אז $\mathbb{F}$ הוא שדה.

$$1_{\mathbb{F}} \in H \subseteq \mathbb{F} \quad 1$$

$$2. \text{ אם } a, b \in H \text{ אז } a \cdot b^{-1} \in H$$

$$(\mathbb{F} - \{0\})^{-1} \text{ הוא } \mathbb{F} \text{ (כל } a \in \mathbb{F} - \{0\} \text{)} \quad a \cdot b^{-1} \in H$$

$$(\mathbb{F} - \{0\})^{-1} \text{ הוא } \mathbb{F} \text{ (כל } a \in \mathbb{F} - \{0\} \text{)} \quad a - b \in H$$

כל H - תת-מערכת של $\mathbb{F}$ היא מערכת של $\mathbb{F}$.

הוכחה

$$1 \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

$$a=2, b=5 \in \mathbb{Q}$$

$$2 \cdot 5^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$$

$$2-5 = -3 \in \mathbb{Q}$$

כל מספר רציונלי הוא מספר ממשי, כל מספר ממשי הוא מספר רציונלי או מספר אי-רציונלי.

הגדרה

$$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$z = a+bi$$

$$\operatorname{Re}(z) = a \quad - \text{חלק הממשי}$$

$$\operatorname{Im}(z) = b \quad - \text{חלק המדומה}$$

$$\bar{z} = a-bi$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= a+bi \\ z_2 &= c+di \end{aligned} \implies z_1 + z_2 = \overbrace{(a+c)}^{\mathbb{R}} + \overbrace{(b+d)}^{\mathbb{R}}i \in \mathbb{C} \quad \text{הסגוריות}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \overbrace{(ac-bd)}^{\mathbb{R}} + \overbrace{(ad+bc)}^{\mathbb{R}}i \in \mathbb{C}$$

$$0 = 0+0i$$

$$1 = 1+0i$$

האחדות

האזכרה

$$z_1 = a+bi$$

$$\begin{aligned} z_2 &= -a+bi \\ \implies z_1 + z_2 &= (a+bi) + (-a+bi) = \\ &= (a-a) + (b+b)i = \\ &= 0+0i = 0 \end{aligned}$$

$$z = a+bi \neq 0 \implies \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \in \mathbb{C}$$

הכונות המקוריות, הקצוות סטנדרטיזציות והפיתוח (דיסטריבוציות) נובעות
מחקר קיימן ב-18.



מה

הכונות של המחקר:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad .1$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad .2$$

$$\overline{\overline{z}} = z \quad .3$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \quad .4$$

הכונות של מחקר נוסף:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad .1$$

הוכחה:

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \quad \text{; נ"נ}$$

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 =$$

$$= a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 =$$

$$= a_1^2 (a_2^2 + b_2^2) + b_1^2 (a_2^2 + b_2^2) =$$

$$= (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2) =$$

$$= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$



$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

הוכחה

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

הוכחה

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = \\ &= z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 = \\ &= |z_1|^2 + z_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 + |z_2|^2 \end{aligned}$$

↑
מ"ק

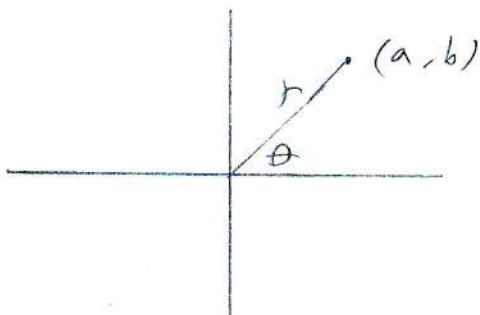
$$\left(\begin{array}{l} 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = a \\ 2|z_1 \cdot \bar{z}_2| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \downarrow \\ 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq 2|z_1 \cdot \bar{z}_2| \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1 \cdot \bar{z}_2| + |z_2|^2 = \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2 = \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

↓

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

הוכחה



$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \sin \theta$$

$$a + bi = r \operatorname{cis} \theta$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$z = r \operatorname{cis} \theta$$

$$z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$$

הוכחה

פעולות מותרות - השוואת מקדמים:

נסמן R_i - הורה i -י.

1. החלפת הורה: $R_i \leftrightarrow R_j$

2. הכפלה הורה R_i בעקטור $\alpha \in F$: $\alpha R_i \rightarrow R_i$

3. איחוס'י כורה R_i בעקטור α הורה אחרת: $R_i + \alpha R_j \rightarrow R_i$

דוגמה:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 3 \\ 6x_1 - 8x_2 = 10 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 6 & -8 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + 3R_2 \rightarrow R_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{array}}$$

שיטה זו נקראת שיטת החילוק לבנון.

קואסי ליניאריות שנים מן שורה שניה:

$$x_1 + x_2 = 0$$

מחזורי: $x_2 = -x_1$ ← אינסוף פתרונות.

מחזורי: $\mathbb{Z}_3$ $\left\{ \begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_2 = 0 \\ x_1 = 1 & x_2 = 2 \\ x_1 = 2 & x_2 = 1 \end{array} \right.$ רק 3 פתרונות!

הפעולות המותרות - שיטת החילוף של סטיוס:

1. החלפת שורות $R_i \leftrightarrow R_j$

2. כפל שורה בסקלר $\alpha \in F, \alpha \neq 0$ $\alpha R_i \rightarrow R_i$

3. הוספת כפולת של שורה לשורה אחרת $R_i + \alpha R_j \rightarrow R_i$

פעולות יאלו נקראות גם פעולות שורה.

הי A מערכת משוואות ליניאריות.

הי $\tilde{A}$ המערכת שהתקבלה מ-A סוגרי שמיני צורה פשוטה שורה כזו סדרת פעולות.

יולי A-1 $\tilde{A}$ -1 יולי יולגס פתרונות.

צורת פשוטה 1, 2, 3. כיוון שכן שני פתרונות של A-1 $\tilde{A}$.

כאן צורת פשוטה 3:

$$A = \begin{array}{c} R_i \\ \left(\begin{array}{ccc|c} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \end{array} \right) \\ R_j \end{array}$$

פעולה: $R_i + \alpha R_j \rightarrow R_i$

$$\tilde{A} = \begin{array}{c} R_i \\ \left(\begin{array}{ccc|c} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} & b_i \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & a_{i2} + \alpha a_{j2} & \dots & a_{in} + \alpha a_{jn} & b_i + \alpha b_j \end{array} \right) \\ R_j \end{array}$$

ונניח שקיים A-1 פתרונות: $(\beta_1, \dots, \beta_n)$

כלומר אם נציב אליו ב-A נקבל משוואות.

$$(A =) \begin{array}{l} R_i \quad a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n = b_i \\ R_j \quad a_{j1}\beta_1 + \dots + a_{jn}\beta_n = b_j \end{array}$$

נראה שבגרון לה מקיים גם את שורה $\tilde{A}$ - R_i :

$$\begin{aligned} & (\alpha_{i1} + \alpha \alpha_{i1})\beta_1 + \dots + (\alpha_{in} + \alpha \alpha_{in})\beta_n = \\ & = \alpha_{i1}\beta_1 + \alpha \alpha_{i1}\beta_1 + \dots + \alpha_{in}\beta_n + \alpha \alpha_{in}\beta_n = \\ & = (\alpha_{i1}\beta_1 + \dots + \alpha_{in}\beta_n) + \alpha(\alpha_{i1}\beta_1 + \dots + \alpha_{in}\beta_n) = \\ & = b_i + \alpha b_i \end{aligned}$$

קראנו בסוק אחר, ולכן A - α - $\tilde{A}$ אולי קבוצה פתוחה.

כאורה צורה נגד תהיה שהפתוחה של $\tilde{A}$ הם גם פתוחה של A ולכן בסך הכל נקרא A - α - $\tilde{A}$ אולי קבוצה פתוחה.

10. מערכת משוואות:

$$b_1 = \dots = b_m = 0$$

1. מערכת משוואות הומוגנית:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{שני ישרים במישור}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{שני מישורים במרחב}$$

מערכת משוואות הומוגנית קיים תמיד בגרון הפתוחות $x_1 = \dots = x_n = 0$

לכן נבדוק אם יש פתוחה אחרת. נחשב $\det A$ של המטריצה A ונראה שהיא שווה לאפס.

2. מערכת משוואות לא הומוגנית: לא פתוחה במרחב:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{לדוגמה:}$$

אלו שני ישרים מקבילים שאינם ייבטלו זה את זה.

למערכת אין פתרון.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow 0x_1 + 0x_2 = 1$$

שורה זו נקראת שורה סתירה, אם מקבלים במהלך האיזון את השורה

$$0x_1 + \dots + 0x_n = c \quad c \neq 0$$

הגבן עם איברות של מערכת משוואות לא הומוגנית ופרימה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$\Downarrow$

$$\underline{R_2:} \quad x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = x_3$$

$$R_1: \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 + 5x_3 = 1$$

$$x_1 = 1 - 5x_3$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 5x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{הצבתן}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$\Downarrow$

$$\underline{R_2:} \quad x_2 = x_3$$

$$\underline{R_1:} \quad x_1 + 5x_3 = 0$$

$$x_1 = -5x_3$$

$$\begin{pmatrix} -5x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{הצבתן המוחלטת הולד}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -5x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{המונע}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{הגבן הולד}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - 5x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{המונע הולד}} \quad \text{כאן}$$

$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$ נלקח

$$\underline{R_1:} \quad 1 + 0 + 0 = 1 \quad \text{נלקח המערכת הולד המונע}$$

$$\underline{R_2:} \quad 2 + 0 + 0 = 2$$

$$\text{כאן} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{הולד הצבתן של המערכת המונע}$$

מעלה:

הי מערכת משוואות היא הומוגנית הומוגנית.

$$\begin{pmatrix} \text{מקדם} \\ \text{של המערכת} \\ \text{ההומוגנית} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{מקדם} \\ \text{של המערכת} \\ \text{ההומוגנית} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{מקדם} \\ \text{של המערכת} \\ \text{ההומוגנית} \end{pmatrix}$$

לוקי בעצם הלצה. נניח יווסף הפרמטרים של המערכת ההומוגנית קווא
מישור המערכת ההומוגנית, ילוי הלצה מסוימת של המישור הנ"ל קווא יווסף של
פרמטרים של המערכת היא הומוגנית.
הוכחה בעזרת מקדמים יוגר של הקודים.

הקדמה:

בשורה נמוכה, המקדמים של המערכת ההומוגנית (מסמלית) שיתנו ס נקראו
מערכת מוביל. מערכת שיתנו מוביל נקראו מערכת מוביל.

הקדמה:

מלכית נקראו מקדמים/מקדמים של המערכת ההומוגנית (מסמלית) שיתנו ס נקראו
בס שורה נמוכה מערכת מערכת ההומוגנית שיתנו ס נקראו.

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 8 \end{array} \right) \end{matrix} \rightarrow \text{מלכית מקדמים}$$

לדוגמא:

מערכת מוביל: x_1, x_2, x_4

מערכת מוביל: x_3

מכאן מערכת לכל מערכת מוביל מלכית מקדמים יס יוספים.

הקדמה:

מלכית מקדמים קוונט: מלכית מקדמים שבה כל מקדמים של מערכת מוביל
שורה יווסף ומכאן לכל מערכת מוביל יס יוספים.

$$\begin{matrix} x_1, x_2, x_4 \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix} \rightarrow \text{לדוגמא:}$$

ע'ל תרגיל זה:

יש למצוא את כל הפתרונות של המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

פתרון:

↓

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = 4$$

נתון המערכת הליניארית הבאה:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & | & \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$x_3 = t$$

נבחר:

$$x_5 = s$$

↓

$$x_4 = 7 - 4s$$

$$x_2 = 6 - 3s - 2t$$

$$x_1 = 2 - 5s - 3t$$

↓

$$X = \begin{pmatrix} 2 - 3t - 5s \\ 6 - 2t - 3s \\ t \\ 7 - 4s \\ s \end{pmatrix}$$

מטרה ביניים:

להציג את המערכת המוקדמת, בעזרתה נקבע כמה פרמטרים (אם כן) יש למערכת.

נניח שיש n משתנים למערכת וקיימים m משוואות. אם $n < m$ אז המערכת אינה פתירה.

מטרה ביניים 2



אם אין התקפות שורה סתירה אזי אין פתרון למערכת.

ב, אם אין שורה סתירה:

אם $n = m$: אזי יש פתרון יחיד.

אם $n > m$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - R_3 \rightarrow R_1 \\ R_2 - 2R_3 \rightarrow R_2 \end{array}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right)$$

אם מספר המשוואות שווה למספר המשתנים אזי ניתן

להציג את המערכת המוקדמת בצורה קטנה:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \beta_n \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \beta_1 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{cases}$$

קבלנו פתרון יחיד.

2, אם $n < m$ (מקרה פרטי):

ישנם משתנים חופשיים ובעזרתם נביא את המשתנים החופשיים ונקבל פתרון כללי.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 5z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 6y + 2z = 10 \end{cases}$$

Solving

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 10 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{7}R_3 \rightarrow R_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 + R_3 \rightarrow R_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 3R_3 \rightarrow R_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

קבלת נא עם פרמטרים:

לאיזה ערך של k יש למערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array} \right)$$

1. אינסוף פתרונות.

2. אין פתרון.

3. פתרון יחיד.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - kR_1 \rightarrow R_3 \end{array}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_2 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1-k \end{array} \right) \rightarrow$$

השורה האחרונה: $(0 \ 0 \ -(k+2)(k-1) \ | \ 1-k)$

$\Leftrightarrow k = -2 \Leftrightarrow (0 \ 0 \ 0 \ | \ 3)$ שורה סתירה, אין פתרון.

$\Leftrightarrow k = 1 \Leftrightarrow$ אינסוף פתרונות - שתי שורות שהאינסוף (כל שורה סתירה)
יש פתרון יחיד - 3 משתנים ו-2 משתנים חופשיים.

$\Leftrightarrow k \neq 1, -2$ 3 משתנים חופשיים וזמן יהיה פתרון יחיד.



יש לבדוק את כל השורות שכוללות שורות סתירה, או לפתור.

מטריצה

הגדרה: מטריצה היא ייצוג מסמך "מספר" בקובץ $m \times n$ מעל F .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} \in F \text{ כאלו}$$

$$1 \leq i \leq m$$

$$1 \leq j \leq n$$

אוסף המטריצות בקובץ $m \times n$ מעל F מונח:

$$M_{m \times n}(F) \text{ או } F^{m \times n}$$

דוגמה: $M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2 \times 3}$ כל אוסף של מטריצות 2×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \text{ דוגמה, } \mathbb{R}$$

מטריצה היא שיש לה צורה אחת וקבוע (וקטור צמוד).

מטריצה היא שיש לה צורה אחת וקבוע (וקטור צמוד).

אכן, כשאומרים וקטור הם מתכוונים וקטור צמוד.

$$\text{דוגמה: } \mathbb{C}^{3 \times 1} = \mathbb{C}^3 \text{ אוסף וקטורים בעלי 3 שורות.}$$

$$(7, 6-i, 3, i) \in \mathbb{C}^{1 \times 4}, \begin{pmatrix} 2+i \\ 5-i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

$$\text{אכן } \mathbb{R}^3 = \text{המרחב שבו אנו חיים. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$a_{ij} = b_{ij} \iff A=B \text{ אזי } A, B \in F^{m \times n} \text{ הצורה}$$

$$1 \leq i \leq m$$

$$1 \leq j \leq n$$

כדוריות מ- $\mathbb{N}$

1. $A, B \in F^{m \times n}$: מטריצה / וקטור

$$C = A + B$$

$\Downarrow$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$0_{m \times n} \in F^{m \times n}$: מטריצה אפס

$$m \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right. \underbrace{\hspace{10em}}_n$$

כך נקבע : $A \in F^{m \times n}$

$$A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$$

גיוסיות מ- $\mathbb{N}$

2. $A, B \in F^{m \times n}$: מטריצה

$$A + B = B + A$$

$$C = A + B \quad D = B + A \quad \text{הוכחה}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad d_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

$$a_{ij}, b_{ij} \in F \text{ וקטור } \uparrow \text{ זהו}$$

$$\underbrace{a_{ij} + b_{ij}} = \underbrace{b_{ij} + a_{ij}} \quad \text{הוכחה}$$

$$c_{ij} = d_{ij}$$

$\Downarrow$

$$C = A + B = B + A = D$$

3. $A, B, C \in F^{m \times n}$: מטריצה

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$$

ד. חילוף

כך נקרא

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$$

ה"ח"ח

ה"ח"ח , $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\alpha, \beta \in F$, 1

$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$, 2

$0 \cdot A = 0_{m \times n}$

$\Leftarrow \alpha = 0 \in F$, 3

מכרזת אינורט / עורז

כח מלרצור

$$A \in F^{m \times n}, B \in F^{n \times k}$$

אם מנסה למכרזת A עורז מנסה למכרזת B עורז AB מנסה למכרזת:

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} =$$

$$= \sum_{t=1}^n a_{it} \cdot b_{tj}$$

מנסה למכרזת $AB \in F^{m \times k}$ עורז מנסה למכרזת B עורז AB מנסה למכרזת.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2x3

3x3

מנסה למכרזת

$$AB_{11} = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 16$$

$$AB \in F^{2 \times 3} \quad \text{כח}$$

$$A_{12} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 22$$

$$A_{13} = 1 \cdot 9 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 28$$

$$A_{21} = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 3 = 46$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 16 & 22 & 28 \\ 46 & 61 & 76 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = 4 \cdot 8 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 4 = 61$$

$$A_{23} = 4 \cdot 9 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 = 76$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 3 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 4 & 4 \cdot 9 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, & 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, & 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

לכח מנסה למכרזת AB עורז מנסה למכרזת B עורז AB מנסה למכרזת.

משפט - כל צורה צמודה

$$(B \in F^n) \quad B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}^{-1} \quad \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & 1 & \\ & & \ddots \\ \hline & & & 1 \end{array} \right) = A \in F^{m \times n} \quad \text{אם } n = m$$

$$\underbrace{AB}_{\text{כלי מניין}} = (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{C_i(A)}_{\substack{\text{הצורה} \\ \text{ה-} i \text{ של } A}}$$

הוכחה: הצורה האחדותית ימין והאחדות שמאלית הן זהות, נגד כל אחד מהצורות האחרות ה- j (שורה) בשני האחדותיים;
כדי j האחדות שמאלית:

$$AB = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$AB_{j1} = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} b_{k1} = \alpha_{j1} b_{11} + \alpha_{j2} b_{21} + \dots + \alpha_{jn} b_{n1} = \\ = \alpha_{j1} \alpha_1 + \alpha_{j2} \alpha_2 + \dots + \alpha_{jn} \alpha_n$$

כדי j האחדות ימין:

$$\alpha_1 \alpha_{j1} + \alpha_2 \alpha_{j2} + \dots + \alpha_n \alpha_{jn}$$

(סכום של מטריות האחדות וזהו כלל סקלרים).



כל גבולת המטריות השמאליות שווה לכל הוכחה.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 3 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 4 & 4 \cdot 9 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (7, 8, 9) + 2 \cdot (0, 1, 2) + 3 \cdot (3, 4, 5) \\ 4 \cdot (7, 8, 9) + 5 \cdot (0, 1, 2) + 6 \cdot (3, 4, 5) \end{pmatrix}$$

לוח דוגמא: איכס מטריות המסבירות שורה-שורה.

משפט - כל שורה שורה

$$B = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{F}^{1 \times m}, \quad A = \begin{pmatrix} - & u_1 & - \\ - & u_2 & - \\ & \vdots & \\ - & u_m & - \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

לוח

$$BA = (\beta_1, \dots, \beta_m) A = \beta_1 \vec{u}_1 + \dots + \beta_m \vec{u}_m = \sum_{i=1}^m \beta_i R_i(A)$$

הדרכה קומה מאוץ וקומה.

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}, \quad B \in \mathbb{F}^{n \times k}$$

טכניקה:

$$\Downarrow$$

$$AB \in \mathbb{F}^{m \times k}$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj}$$

הערה חשובה: טען לעיל כי הן מקרים בהם $AB \neq BA$ ולכן גם כן אינו מוגדר! כלומר, כל מטריות אינן קומוטטיות!

א. כוונה כללית

כלליות: המסקנות הנכונות הן אלו הכוללות את כל המקרים.

$$A(B+C) = AB+AC \quad 1.$$

$$(B+C)A = BA+CA$$

$$A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad 2.$$

$$(\alpha A)B = \alpha(AB) \quad 3.$$

$$0A = A \cdot 0 = 0 \quad 4.$$

דוגמה

1.3, 1.

$$\begin{array}{c} A(B+C) = AB+AC \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_D \quad \underbrace{\quad \quad}_E \quad \underbrace{\quad \quad}_F \\ \underbrace{\quad \quad \quad}_G \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_H \end{array}$$

הוכחה

$$A \in F^{1 \times m}, \quad B, C \in F^{m \times n} \\ \underbrace{\quad \quad}_D \in F^{m \times n}$$

$$\Downarrow \\ G = AD \in F^{1 \times n}$$

הוכחה

$$\begin{array}{c} AB, AC \in F^{1 \times n} \\ \underbrace{\quad \quad}_E \quad \underbrace{\quad \quad}_F \\ \Downarrow \\ H \in F^{1 \times n} \end{array}$$

$$\therefore G = H \quad \text{1.1.1}$$

$$e_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{im}b_{mj} \quad / +$$

$$f_{ij} = a_{i1}c_{1j} + \dots + a_{im}c_{mj}$$

$\Downarrow$

$$h_{ij} = a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + \dots + a_{im}(b_{mj} + c_{mj}) =$$

$$= a_{i1}d_{1j} + \dots + a_{im}d_{mj} = g_{ij}$$

1.1.2

$\Downarrow$

$$h_{ij} = g_{ij}$$

$\Downarrow$

$$H = G$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$\underbrace{A \cdot \underbrace{B \cdot C}_D}_F = \underbrace{(A \cdot B)_E \cdot C}_G$$

1.2.2

1.2.2 $A \in F^{m \times n}, B \in F^{n \times k}, C \in F^{k \times p}$

$$\underbrace{A \cdot B \cdot C}_{D \in F^{m \times p}}$$

$\Downarrow$

$$F \in F^{m \times p}$$

$p \cap$

$$A \cdot B \cdot C \in F^{m \times k}$$

1.2.2 $A \in F^{m \times n}, B \in F^{n \times k}, C \in F^{k \times p}$

$\Downarrow$

$$G \in F^{m \times p}$$

$A \in F^{m \times n}$ המטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

המערכת:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \vec{b}$$

הערכות:

$$2x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 8$$

$$9x_1 - 6x_2 + 0x_3 = 9$$

המערכת:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 9 & -6 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

משפט - קקרי שנין אלוסל הפגרות פל מרבר הוולגל ארן אלוסל הפגרות
פל מרבר לא הוולגל.

נל ונה מרבר משולל משולל לא הוולגל $A \in F^{n \times n}$

$$A \vec{x} = \vec{b} \quad (\vec{b} \neq \vec{0})$$

$n \times n$ $n \times 1$ $n \times 1$

נל ונה v_0 הוא הרון פל מרבר לו. $(v_0 \in F^{n \times 1})$

נסמן: $H = \{ \vec{v} \in F^{n \times 1} \mid A\vec{v} = \vec{0} \}$ אלוסל הפגרות פל מרבר הוולגל.

$L = \{ \vec{v} \in F^{n \times 1} \mid A\vec{v} = \vec{b} \}$ אלוסל הפגרות פל מרבר לא הוולגל.

$$L_1 = \{ \vec{v}_0 + \vec{v} \mid \vec{v} \in H \}$$

נדקדק:

$$L = L_1$$

ל.3

הוכחה:

יש להראות שכל קו כווטל

$$(L_1 \subseteq L) \Leftarrow$$

יהי $\vec{v}_0 + \vec{v} \in L_1$ ונראה ש $\vec{v}_0 + \vec{v} \in L$.

$$A(\vec{v}_0 + \vec{v}) = \underbrace{A\vec{v}_0}_{\vec{b}} + \underbrace{A\vec{v}}_{\vec{0}} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

$v \in H$
ולכן
 $A\vec{v} = \vec{0}$

$\Downarrow$

$$\vec{v}_0 + \vec{v} \in L$$

$$(L \subseteq L_1) \Rightarrow$$

נל ונה $\vec{u} \in L$ ונראה ש $\vec{u} \in L_1$.
נל ונה $\vec{x} = \vec{u} - \vec{v}_0$

$$A\vec{x} = A(\vec{u} - \vec{v}_0) = \underbrace{A\vec{u}}_{\vec{b}} - \underbrace{A\vec{v}_0}_{\vec{b}} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{x} \in H \Rightarrow \vec{u} - \vec{v}_0 \in H$$

$$\vec{u} = \vec{x} + \vec{v}_0$$

ולכן $\vec{u} \in L_1$ (אם הדרגה מקבוצה L_1)

$$L = L_1$$

ולכן מסק הכלל

הצגה גשומה של המרחב הווקאלי:

$$A \in F^{m \times n}, \quad A\vec{x} = \vec{0} \quad \text{לר}$$

נניח H הוא אוסף המרחב הווקאלי.

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in H, \quad \alpha, \beta \in F$$

לכ:

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in H, \quad 1.$$

$$\alpha \vec{v}_1 \in H, \quad 2.$$

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 \in H, \quad 3.$$

הוכחה:

$$A(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in H, \quad 1.$$

$$A(\alpha \vec{v}_1) = \alpha A\vec{v}_1 = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \alpha \vec{v}_1 \in H, \quad 2.$$

$$\begin{aligned} A(\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2) &= A(\alpha \vec{v}_1) + A(\beta \vec{v}_2) = \alpha A\vec{v}_1 + \beta A\vec{v}_2 = \alpha \cdot \vec{0} + \beta \cdot \vec{0} = \\ &= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 \in H \end{aligned} \quad 3.$$

הצגה - מטריצה:

$$A \in F^{m \times n} \quad \text{לר}$$

(t - transpose)

$$A^t \in F^{n \times m} \quad \text{לר}$$

$$(A^t)_{ij} = A_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

לדוגמה:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

LEMMA

$$(A^t)^t = A \quad .1$$

$$\alpha \in \mathbb{F} \quad (\alpha A)^t = \alpha A^t \quad .2$$

$$A, B \in \mathbb{F}^{m \times n} \quad (A+B)^t = A^t + B^t \quad .3$$

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times k} \quad .4$$

$$(AB)^t = B^t A^t$$

PROOF

$$AB \in \mathbb{F}^{m \times k} \quad .5$$

$\Downarrow$

$$(AB)^t \in \mathbb{F}^{k \times m}$$

$$B^t \in \mathbb{F}^{k \times n}, A^t \in \mathbb{F}^{n \times m} \Rightarrow B^t A^t \in \mathbb{F}^{k \times m}$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad .6$$

$\underbrace{\quad}_{E}$
 $\underbrace{\quad}_{F}$

$\underbrace{\quad}_{D}$
 $\underbrace{\quad}_{G}$

$\underbrace{\quad}_{C}$

$$g_{ij} = d_{i1} \cdot c_{1j} + \dots + d_{in} \cdot c_{nj} = b_{n1} \cdot a_{j1} + \dots + b_{ni} \cdot a_{jn} =$$

$$= a_{j1} \cdot b_{n1} + \dots + a_{jn} \cdot b_{ni} = e_{ji} = f_{ij}$$

$\Downarrow$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad \text{--- e.p.d.N) } g_{ij} = f_{ij} \quad \text{p.f.}$$

גלגרה:

מלריצה $A \in F^{n \times n}$ מקרא סמלרי
אם $A^t = A$ מקריס

מלריצה $A \in F^{n \times n}$ מקרא אנלי סמלרי
אם $A^t = -A$

אקדמא:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

סמלרי

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

אנלי סמלרי

הרעיון: אם $A \in F^{n \times n}$ מקריס $A + A^t = 0$ סמלרי

$$(A + A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

הוכחה:

אכן $A + A^t$ סמלרי

הרעיון: קראו של מלריצה $A \in F^{n \times n}$ נמן $A = B + C$ כ- B סמלרי

כ- C אנלי סמלרי ו- C אנלי סמלרי

$$A = B + C$$

הרעיון: נמן כ- B

$$A^t = (B + C)^t = B^t + C^t$$

אכן:

$$A^t = B - C \quad \text{כ-} C \text{ אנלי סמלרי. נמן כ-} B$$

$$A + A^t = 2B \Rightarrow B = \frac{A + A^t}{2}$$

אכן:

$$A - A^t = 2C \Rightarrow C = \frac{A - A^t}{2}$$

ומכאן של מלריצה A יכולה להיכתב כסכום

של מלריצה סמלרי ואנלי סמלרי בצורה הבאה:

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

אנלי סמלרי סמלרי

הקדמה: מטריצה מסדר אחד נקראת וקטור עמודי.

ריבועיות מ'חזקה':

1. מחולשת:

מחולשת עליונה:

$$\begin{pmatrix} \times & & \\ 0 & \times & \\ \vdots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \\ i > j$$

מחולשת מתחתונה:

$$\begin{pmatrix} \times & 0 & \dots & 0 \\ & \times & \ddots & \\ & & \times & 0 \\ & & 0 & \times \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \\ j > i$$

אלכסונית:

$$\begin{pmatrix} \times & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \times & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \times & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \times \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0 \\ i \neq j$$

סקלריות:

$$(\alpha I)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \times & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \times & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$(I_n \in \mathbb{F}^{n \times n})$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה היחידה:

הכנסת המאידה

$$I \cdot A = A \quad A \in F^{m \times n}, I \in F^{m \times m}$$

$$A \cdot I = A \quad A \in F^{m \times n}, I \in F^{n \times n}$$

הוכחה

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n$

$$A \cdot I = A(e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) = (Ae_1 \ Ae_2 \ \dots \ Ae_n) \quad .1$$

$$Ae_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} = A_1$$

↓

$$Ae_i = A_i$$

↓

$$A \cdot I = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ \dots \ A_n) = A$$

הוכחה נוספת: $IA = A - e$

$$I = \begin{pmatrix} -e_1 \\ -e_2 \\ \vdots \\ -e_n \end{pmatrix} \quad .2$$

$$\begin{aligned} IA &= \begin{pmatrix} -e_1 \\ \vdots \\ -e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r_1 \\ \vdots \\ -r_n \end{pmatrix} = \underbrace{\left(e_1 \begin{pmatrix} -r_1 \\ \vdots \\ -r_n \end{pmatrix} \right)}_{\begin{pmatrix} -r_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} + \dots + \underbrace{\left(e_n \begin{pmatrix} -r_1 \\ \vdots \\ -r_n \end{pmatrix} \right)}_{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -r_n \end{pmatrix}} = \\ &= \begin{pmatrix} e_1 A \\ e_2 A \\ \vdots \\ e_n A \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

הרצאה מס' 3 - בעיות

מורה רק באשר המערכות ריבועיות ואילו פתרון.

$$A^0 = I$$

לדיר המקור:

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A \cdot A$$

:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$$

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B, C \in \mathbb{F}^{n \times l}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} (A(B+C))_{ij} &= \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot (b_{kj} + c_{kj})) = \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot b_{kj} + a_{ik} \cdot c_{kj}) = \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot c_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times l}, C \in \mathbb{F}^{l \times r}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} (A(BC))_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot \sum_{p=1}^l (b_{kp} \cdot c_{pj})) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^l (a_{ik} \cdot b_{kp} \cdot c_{pj}) = \sum_{p=1}^l \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot b_{kp} \cdot c_{pj}) = \\ &= \sum_{p=1}^l (c_{pj} \cdot \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot b_{kp})) = \sum_{p=1}^l c_{pj} \cdot (AB)_{ip} = \\ &= \sum_{p=1}^l (AB)_{ip} \cdot c_{pj} = ((AB)C)_{ij} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times l}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} ((\alpha A)B)_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\alpha a_{ik}) \cdot b_{kj} = \sum_{k=1}^n \alpha a_{ik} \cdot b_{kj} = \alpha \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = \\ &= (\alpha(AB))_{ij} \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$(\alpha A)B = \alpha(AB)$$

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}, O \in \mathbb{F}^{n \times l}$$

$\Downarrow$

$$(A \cdot O)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot 0_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot 0 = 0 \cdot \sum_{k=1}^n a_{ik} = 0$$

$\Downarrow$

$$A \cdot O = O_{m \times l}$$

הוכחה א. כוונתו $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - תרגיל 17 בפרק 2

$$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

.1

$$\Downarrow$$
$$((A^t)^t)_{ij} = (A^t)_{ji} = A_{ij}$$

$$\Downarrow$$
$$(A^t)^t = A$$

$$\alpha \in \mathbb{F}, A \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

.2

$$\Downarrow$$
$$((\alpha A)^t)_{ij} = (\alpha A)_{ji} = \alpha (A)_{ji} = (\alpha A^t)_{ij}$$

$$\Downarrow$$
$$(\alpha A)^t = \alpha A^t$$

$$A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

.3

$$\Downarrow$$
$$((A+B)^t)_{ij} = (A+B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij}$$

$$\Downarrow$$
$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times l}$$

.4

$$\Downarrow$$
$$((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n (A)_{jk} \cdot (B)_{ki} = \sum_{k=1}^n (A^t)_{kj} \cdot (B^t)_{ik} =$$
$$= \sum_{k=1}^n (B^t)_{ik} \cdot (A^t)_{kj} = (B^t A^t)_{ij}$$

$$\Downarrow$$
$$(AB)^t = B^t A^t$$

הערה - חשוב לזכור מכיוון הוכחה של חלק קטן מהתרגיל.

הוכחה לכונת מטריצה היחידה - תרגיל 1.3

$$A \in F^{m \times n}, I \in F^{n \times n}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ (AI)_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot I_{kj} = \overbrace{a_{i1} \cdot I_{1j}}^0 + \overbrace{a_{i2} \cdot I_{2j}}^{a_{ij} \cdot 1} + \overbrace{a_{in} \cdot I_{nj}}^0 \\ &= 0 + a_{ij} \cdot 1 + 0 = a_{ij} \\ &\Downarrow \\ AI &= A \end{aligned}$$

$$A \in F^{m \times n}, I \in F^{m \times m}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ (IA)_{ij} &= \sum_{k=1}^m I_{ik} \cdot a_{kj} = \overbrace{I_{i1} a_{1j}}^0 + \overbrace{I_{ii} a_{ij}}^{1 \cdot a_{ij}} + \overbrace{I_{im} a_{mj}}^0 \\ &= 0 + 1 \cdot a_{ij} + 0 = a_{ij} \\ &\Downarrow \\ IA &= A \end{aligned}$$

הערה: תרגיל זה מכיל הוכחה של תא קטן למעלה.

אברהם אייזנברג / שיעור 4

אינדוקציה – הוכחה מתמטית

בסיס האינדוקציה:

$$n=1, 2$$

נניח שהקיום עבור $k=n$, ונניח שהקיום עבור $k=n+1$

הקשר של מטריות

$$A \in F^{n \times n}$$

$$A^0 = I_{n \times n}$$

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$\vdots$$

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k$$

הוכחות של הקשר של מטריות

$$(1, m \in \mathbb{N})$$

$$A^k \cdot A^m = A^{k+m} \quad 1.$$

$$(A^k)^m = A^{k \cdot m} \quad 2.$$

הוכחה – נוכח האינדוקציה:

האינדוקציה על k (מקבוצה):

$$A^k \cdot A^m = A^{k+m} \quad 1.3.1$$

בסיס: $k=1$

$$A^1 \cdot A^m = A^1 \cdot (A^m) = A^1 \cdot (\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_m) =$$

$$\downarrow \text{לפי תכונות היחידות} \text{ על כל מטריות}$$

$$= (\underbrace{A^1 \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{m+1}) = A^{m+1}$$

$k=2$

$$A^2 \cdot A^m = (\underbrace{A \cdot A}_2) \cdot (\underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_m) = (\underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_{m+2}) = A^{m+2}$$

$$A^{n+1} \cdot A^m = \underbrace{(A \cdot \dots \cdot A)}_{n+1} \cdot A^m = A \cdot \underbrace{(A^n)}_{\text{induktionsf.}} \cdot A^m = A^{n+m} =$$

1.3.2

בסיס האוניברסיטה:

$$14 = 1$$

ל"ו = נ

$$\therefore k = n+1 \text{ वा } n$$

$$\begin{aligned} (A \cdot A^n) &= A \cdot (\underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_n) = \underline{\underline{A^{n+1}}} \\ &= (\underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_n) \cdot A = A^n \cdot A \\ &A \cdot B \cdot C = (AB)C = A(BC) \quad \text{p. 110} \end{aligned}$$

$$= A^{n \cdot m} \cdot A^m = A^{n \cdot m + m} = A^{(n+1)m}$$

ה'תשנ"ב
ד'תשנ"ב

הסקרה לשמה

מטריצה $O_n \neq A \in F^{m \times n}$ נקראת "מאונק" ואם $n \neq m$.
 $O_n \neq B \in F^{n \times n}$ כך $AB = O_n = 0$.

לדוגמא:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{גורם צ'ירק}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הסקרה:

יהי $A \in F^{m \times n}$ נאמר A - ע הפיכה אם $n = m$ קיימת
 $C \in F^{n \times m}$, $B \in F^{n \times m}$ כך $CA = I_n$ ו- $AB = I_m$.

$$CA = I_n \quad , \quad AB = I_m$$

$n \times m$ $m \times n$ $n \times m$ $m \times m$

משפט:

יהי $A \in F^{m \times n}$ הפיכה אז $m = n$. ($F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)

נוכח בשלבים:

משפט:

יהי $A \in F^{m \times m}$ אם $m < n$ אז לא תמצא $Ax = 0$ יש אינסוף פתרונות.
 אם $m \geq n$ תמצא $Ax = 0$ רק פתרון יחיד או אינסוף פתרונות.

הוכחה:

הוכחה: אם $m < n$ יש לכל חוג m משתנים מובילים חלק n של המשוואה 23.

m - משתנים מובילים. כלומר נוכל לומר בודדות של המשתנים $n - m$ איננו מובילים.
 מאידך, אם $m \geq n$ ייתכן שיש משתנים מובילים (או גרן) מלבד שבו כל שורה יש משתנה מוביל באחד יש לכל חוג m משתנים מובילים. (בז'אן כל שורה יש משתנה מוביל. יש פחות $n - m$ משתנים מובילים. (הערה: מדובר על מטריצה מרובעת)

(1) פתרון יחיד

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{(2) אין סוף פתרונות}$$

משפט:

היה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ המייצג $m=n$

הוכחה:

A הפכה ולכן לפי ההשקפה קיימות שתי מטריות $B, C \in \mathbb{F}^{n \times m}$

$$CA = I_n, \quad AB = I_m \quad \text{כך } e$$

עבור המטריצה B ניקח מרחב $B \vec{x} = 0$

$$AB \vec{x} = A \cdot 0$$

$$I_m \vec{x} = A \cdot 0$$

$$\vec{x} = 0$$

לכן, לפי המשפט $m \geq n$ (כי יש פתרון יחיד)

הנאמר בזירה נראה עבור המטריצה C :

$$A \vec{x} = 0$$

$$CA \vec{x} = C \cdot 0$$

$$I_n \vec{x} = C \cdot 0$$

$$\vec{x} = 0$$

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n} \\ \downarrow$$

$$m \geq n$$

ולכן

הסקת הכול $n=m$

נסקרה:

בה מלריצה הריכה היא ריבועית $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך שקיימת $B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך
 $CA = AB = I_n$ - e

משפט:

$$B = C$$

הוכחה:

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

נסקרה:

יהי $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה וההופכה שלה A^{-1} .

הוכחה:

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad *$$

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I \quad \text{על ידי}$$

כאמור A היא הפיכה על A^{-1} , אבל ההופכה של A^{-1} היא $(A^{-1})^{-1}$

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \text{לכן}$$

משפט:

יהי $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכות אזי AB הפיכה ומה הפיכה שלה - e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

אנסימטריה

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1})A^{-1} = \quad \text{הוכחה:}$$

$$= (AI)A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I) \cdot B =$$

$$= B^{-1} \cdot B = I$$

הראינו שההופכה של AB היא $B^{-1}A^{-1}$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

הוכחה:

הוכחנו כי מטריצה ממוקדת אינסופית איננה רגולרית!

בהוכחה:

נתון $A \in F^{n \times n}$ ממוקדת אינסופית. ללא סתירה שקיימת מטריצה B כך $BA = O = E$.
נניח בעזרת $A = E$ הריבוי, כלומר קיימת מטריצה $C \in F^{n \times n}$ כך $AC = CA = I = E$.

$$AC = I \quad / \cdot B$$

$$B(AC) = BI$$

$$(BA)C = BI$$

$$O \cdot C = B$$

$$O = B$$

הסתירה

משפט:

$A, B \in F^{n \times n}$ אז A, B הפיכים $\Leftrightarrow AB$ הפיכה.

הוכחה:

$\Leftarrow$ אם A, B הפיכים קיימות $A^{-1}, B^{-1} \in F^{n \times n}$ כך E :

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

$$B^{-1} \cdot B = B \cdot B^{-1} = I$$

נגדיר $C = B^{-1}A^{-1}$, נגדיר:

$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$$

$$C(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$$

אכן AB הפיכה.

$\Rightarrow$ נניח $E = AB$ הפיכה, ללא סתירה שקיימת $C \in F^{n \times n}$ כך E :

$$(AB)C = C(AB) = I$$

$\Downarrow$

$$\xrightarrow{\text{אסוציאטיביות}} A(BC) = I \quad (CA)B = I \quad \Rightarrow$$

CA הפיכה ו- B הפיכה

BC הפיכה ו- A הפיכה

(ולא משני הצדדים כפי שציינתי), איש הדוכחה, נוכח משפט נוסף.

הצגה:

לפיכך אם P אריתמטית פשוטה.
הפונקציה P היא מטריצה A מסמן $P(A)$

אקדמאי: $P: R_1 \leftrightarrow R_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

אם נבצע פעולה שורה אחת על המטריצה I מסמן אותה $P(I)$ ונקרא
לה מטריצה אלתמטית.

אקדמאי:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. אם P היא $R_1 \leftrightarrow R_3$

$$P(I) = E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(בה שורה מספר $\alpha \neq 0$) $P(I) = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$$

2. אם P היא $3R_2$

$$(הוספת פעולה שורה) $P(I) = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$$

3. אם P היא $R_1 + 2R_2$

$\Downarrow$

E_1, E_2, E_3 קואסי-מטריצה אלתמטיות

הכונת על מטריצות - תאוריות:

1. יהי P פעולה שורה אלמנטרית אזי לכל $A \in F^{n \times n}$ מתקיים:

$$P(A) = P(I) \cdot A$$

חוק לכל זוג מטריצות שהכפלה ביניהן מוגדרת מתקיים

$$P(AB) = P(A) \cdot B$$

2, $P(I)$ היא המכנה והמתקיים:

$$(P(I))^{-1} = P(I)$$

כאשר P^{-1} היא פעולה השורה ההפוכה ל- P .

דוגמאות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

דוגמה 1 - P_1 :

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

דוגמה 2 - P_2 :

$$E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}(I)$$

$$(P: 3R_2 \rightarrow P^{-1}: \frac{1}{3}R_2)$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

הוכחת התכונה של האלמנטריות:

$$I = \begin{pmatrix} -e_1- \\ -e_2- \\ \vdots \\ -e_n- \end{pmatrix} \quad \text{1. נכנסו:}$$

ונבדוק מתי האוסף עבור $\rho(I)$ יכול להיות הפעולה השורה:

$$\rho: R_i \leftrightarrow R_j \quad \text{או הגרסה שורה:}$$

$$\rho(I) = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \end{matrix}$$

$$e_i \cdot A = e_i \cdot \begin{pmatrix} -r_1- \\ -r_2- \\ -r_3- \\ \vdots \\ -r_n- \end{pmatrix} = r_i(A) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{השורה } i \text{ של } A \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \rho(I) \cdot A &= \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e_1 A \\ \vdots \\ e_j A \\ \vdots \\ e_i A \\ \vdots \\ e_n A \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ r_j(A) \\ \vdots \\ r_i(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix} = \rho(A) \end{aligned}$$

2. כפל מרחיב את המטריצה $\alpha \neq 0$

$$P(I) = \begin{pmatrix} -e_1 & - \\ & \ddots & \\ -\alpha e_i & - \\ & \ddots & \\ -e_n & - \end{pmatrix}$$

$$P(I) \cdot A = \begin{pmatrix} -e_1 & - \\ & \ddots & \\ -\alpha e_i & - \\ & \ddots & \\ -e_n & - \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e_1 A \\ \vdots \\ \alpha e_i A \\ \vdots \\ e_n A \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ \alpha r_i(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix} = P(A)$$

3. הוספת שורה למטריצה

$$R_i \leftarrow R_i + R_j \quad : P$$

$$P(I) = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i + \alpha e_j \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$P(I) \cdot A = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i + \alpha e_j \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} e_1 A \\ \vdots \\ (e_i + \alpha e_j) A \\ \vdots \\ e_n A \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e_1 A \\ \vdots \\ e_i A + \alpha e_j A \\ \vdots \\ e_n A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ \vdots \\ r_i(A) + \alpha r_j(A) \\ \vdots \\ r_n(A) \end{pmatrix} =$$

$$= P(A)$$

אסוציאטיביות

$$f(AB) = f(I) \cdot (AB) \stackrel{\downarrow}{=} (f(I)A)B =$$

↑
נכ"י שרירותי
מקורם

$$= f(A)B$$

2. f בעל שורה יחידה ולכן מהק"מ:

$$f(f^{-1}(I)) = I$$

$$f(f^{-1}(I)) = f(I) \cdot f^{-1}(I) = I \quad \text{לפי 1.}$$

$$f^{-1}(f(I)) \stackrel{\uparrow}{=} f^{-1}(I) \cdot f(I) = I \quad \text{כמו כן:}$$

$$(f(I))^{-1} = f^{-1}(I) \quad \text{קל"מ ע-}$$

משפט 1.1:

בהא $A \in F^{m \times m}$ וג' $CF(A)$ - הצורה המורחבת קטומה של A ,
 יאלי ק"מ מלכיצור מתמטיות: $E_1 \dots E_k \in F^{m \times m}$
 כך ע- $E_k \dots E_2 \cdot E_1 \cdot A = CF(A)$

דוכחה:

נתן תוצאת הצורה הקטומה של A אז יד' א- בעל שורה

$$A \xrightarrow{p_1} \xrightarrow{p_2} \dots \xrightarrow{p_k} CF(A)$$

אז p_i מהשורה מלכיצור מתמטיות

$$p_i(I) = E_i \quad 1 \leq i \leq k$$

$$\begin{aligned} (E_k \cdot E_{k-1} \cdot \dots \cdot E_1)A &= E_k \cdot \dots \cdot E_2 (E_1 A) = \\ &= E_k \cdot \dots \cdot E_2 (p_1(I)A) = E_k \cdot \dots \cdot E_2 (p_1(A)) \\ &= E_k \cdot \dots \cdot E_3 (p_2(p_1(A))) = \\ &= \dots = p_k(\dots(p_2(p_1(A)))\dots) = CF(A) \end{aligned}$$

$$E_k \cdot \dots \cdot E_1 A = CF(A) \quad \text{ולכן:}$$

משפט:

אם A קולט שורה B -ל אזי יש מטריצה הפיכה P כך ש:
 $PA = B$

הוכחה:

היה A ו- A קולט שורה B -ל אזי A ו- A קולט שורה
מטריצות סולמטריות $E_1, \dots, E_n$ כך $E_n \dots E_1 A = B$
ולכן $P = E_1 \dots E_n$
 P הפיכה מכפלת מטריצות הפיכות:

$$P^{-1} = E_1^{-1} \dots E_n^{-1}$$

$$(E_1^{-1} \dots E_n^{-1})(E_1 \dots E_n) = I \quad \text{וכן (היפוך)}$$

הערה:

נתון $A \in F^{n \times n}$ מטריצה $B \in F^{n \times n}$ היא ההופכה משמאל של A אם $BA = I$.
מטריצה $C \in F^{n \times n}$ היא ההופכה מימין של A אם $AC = I$.

הראינו שאם A הפיכה מימין ומשמאל אזי $B=C$ ו- A הפיכה.

משל:

אם $A, B \in F^{n \times n}$ אז $AB = I$ אם ורק אם $BA = I$.

הנני מוכיח:

$$n(n^2 + 17) \text{ מתחלק ב-6}$$

הוכח:

פתרון:

$$n=1 \Rightarrow 1 \cdot (1^2 + 17) = 18$$

הוכח:

$\uparrow$
מתחלק ב-6

נניח שמתקיים עבור $n=k$: $1 \cdot (1^2 + 17)$ מתחלק ב-6

נוכיח עבור $n=k+1$:

$$\begin{aligned} (k+1)(k^2 + 17) &= (k+1)(k^2 + 2k + 1 + 15) = \\ &= k(k^2 + 17) + k^2 + 2k + 1 + 18 = \\ &= k(k^2 + 17) + 3k^2 + 3k + 18 \end{aligned}$$

$\uparrow$
מתחלק ב-6

$$3k^2 + 3k + 18 = 3(k^2 + k + 6)$$

נרצה להראות - $k^2 + k + 6$ זוגי

$$2 \mid k^2 + k + 6$$

זוגי:

$$2 \mid k^2 + k + 6$$

זוגי:

טאלסמה חילארי / שיעור 5

גלכור

$CF(A)$ - הבורה הקטנה של A יולי קיינו
 $E_1, \dots, E_n, A = CF(A)$ מחרבה אולמארי
 $PA = CF(A)$ כומר קיינו P הפיכה כך e :

משפט

אם $A, B \in F^{n \times n}$ אז $AB = I$ או $BA = I$

הוכחה

למה: במחירה A יין שור ארסם.
 e, A - השורה ה- i של A לפי כח שורה שורה,
 נניח בשורה i שיש A שור ארסם ולווי האור ה- i .
 $e, A = (0 \dots 0)$ אכן:
 $AB = I$ יקום e :
 $e, (AB) = (e, A)B = \vec{0} B = \vec{0}$ מכאן e :
 $e, (AB) = e, I = e$ אכן הרי יקום e :

גמירה

למה 2: $CF(A)$ - ה- $CF(A)$ יין שור ארסם.

הוכחה: נניח בשורה i שיש שור ארסם ה- $CF(A)$.

$PA = CF(A)$ יקום P הפיכה כך e :

$$P = P(I) = P(AB) = (PA)B = CF(A)B$$

נכחן את שני הארסם שקבלנו ה- P^{-1} מ'אין:

$$PP^{-1} = CF(A)BP^{-1}$$

$$I = CF(A)BP^{-1} = CF(A)(BP^{-1})$$

יין שור ארסם

יש שור ארסם
 כי ה- $CF(A)$ יש
 שור ארסם

נסקרה משתתפת:

A ריבועית ולכן $CF(A) = I$ (אזרח גרירה שלר אלסס סטירה
למה שרובתנו).

סיום הרובתה:

$$I = CF(A) = PA$$

שרתי ק"מ $PA = I$ ריבוע כן $CF(A) = PA$.

$$B = IB = CF(A)B = (PA)B = P(AB) = PI = P$$

$$B = P \quad \text{כלומר}$$

$$PA = I \quad \text{ולכן} \quad BA = I$$

$$AB = I, \quad BA = I \quad \text{שמה ק"מ}$$

לכן A רובתה ל B ו B רובתה ל A שתי רובות.

$$AB = I \Leftrightarrow BA = I \quad \text{למה ק"מ רובתה:$$

$$(BA)^t = I^t \quad \text{ק"מ משתתפתה:}$$

$$A^t B^t = I$$

(משתתפתה בורה כמו קודם).

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad \text{הרובתה:}$$

$$A \text{ רובתה } A^t \Leftrightarrow A^t \text{ רובתה } A$$

$$\left[\begin{array}{l} AA^{-1} = I \\ (AA^{-1})^t = I^t \\ (A^{-1})^t A^t = I \\ \underbrace{(A^{-1})^t}_{\text{הרובתה}} \\ \underbrace{A^t}_{\text{ל}} \\ (A^t)^{-1} \end{array} \right] \quad \text{הרובתה:}$$

הוכחה: השלמה:

משפט: AB הפיכה $\Leftrightarrow A, B$ הפיכות.

הוכחה:

$\Leftarrow$ AB הפיכה $\Leftrightarrow$ קיימת $C \in F^{n \times n}$ כך ש:

$$C(AB) = I, (AB)C = I$$

$$(CA)B = I, A(BC) = I$$

כלומר A הפיכה מימין, לפי המשפט האמור A הפיכה שמאלית ולכן A הפיכה.
 כלומר B הפיכה שמאלית ולפי המשפט האמור B הפיכה מימין ולכן B הפיכה.

משפט:

$Q \in F^{n \times n}$ הפיכה $\Leftrightarrow$ ניתן להפגיש כמעטות של מטריצות שמתארות.

הוכחה:

Q הפיכה ולכן $CF(Q) = I$

$$\underbrace{E_1 \dots E_k}_{Q^{-1}} Q = CF(Q) = I$$

$$\downarrow$$
$$Q^{-1} = E_1 \dots E_k$$

ידוע שמתארות המתארות הפיכות ולכן לכל E_i קיימת E_i^{-1}

$$E_i E_i^{-1} = E_i^{-1} E_i = I \quad \text{כך ש:}$$

נכנסו משמאל הפיכות של המתארות:

$$E_k^{-1} (E_1 \dots E_k Q) = E_k^{-1} I$$

$$\underbrace{(E_k^{-1} E_k)}_I E_{k-1} \dots E_1 Q = E_k^{-1}$$

בסך הכל נקבל ש:

$$Q = E_k^{-1} E_{k-1}^{-1} \dots E_1^{-1}$$

נסקנה: אלו גורמים להפוך מטריצות.

הערה: $(E_{i_2} \dots E_{i_1}) A = I$ (כאשר A הפיכה)

$$\underbrace{(E_{i_2} \dots E_{i_1})}_{A^{-1}}$$

נדרש יאל $(A|I)$

$$(A|I) \xrightarrow{P_1} (E_1 A | E_1) \xrightarrow{P_2} (E_2 E_1 A | E_2 E_1)$$

$$\longrightarrow \dots \longrightarrow (E_{i_k} \dots E_{i_1} A | E_{i_k} \dots E_{i_1}) = (I | A^{-1})$$

אם הצלחנו להגיע ל- I בצד שמאל אזי המטריצה שקיבלנו הייתה A^{-1} .

אם לא הצלחנו והתאססה שורה בשמאל אזי A איננה הפיכה!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + 3R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{-R_2 \rightarrow R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$\Downarrow$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

טריק:

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 3 - 1 \cdot 5} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

אזכור קטן:

מרחבים וקטוריים:

V מקרא מרחב וקטורי מעל שדה F אם הוא קבוצה עם פעולות:

חיבור:

ניתן לגביו $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$
ככל בסקטור:

ניתן להכפיל בסקטור $\alpha \in F$ $\alpha \vec{v}_1$

כך מתקיימות התכונות הבאות:

חיבור:

סגירות: $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V : \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$

אסוציאטיביות: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$

איבר נייטרלי לחיבור: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V : \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3$

איבר נייטרלי לחיבור: קיים $\vec{0} \in V$ כך שמתקיים לכל $\vec{v} \in V$

$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

קיים איבר נגדי: לכל $\vec{v} \in V$ קיים $(-\vec{v}) \in V$ כך ש:

$$(-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

כפל בסקטור:

סגירות: $\vec{v} \in V, \alpha \in F : \alpha \vec{v} \in V$

אסוציאטיביות: $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v}) : \alpha, \beta \in F$

גורם הפילוג: $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v} : \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, \alpha, \beta \in F$

$$\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2$$

כפל באיחידה: $1 \in F : 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

תכונות שדה וקטורי

עבור V שדה וקטורי מעל F , אם

$$\vec{v} \in V, 0 \in F \quad 0 \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad 1$$

$$\alpha \in F \quad \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad 2$$

$$\vec{v} = \vec{0} \iff \alpha = 0 \iff \alpha \vec{v} = \vec{0} \quad 3$$

הוכחה:

$$0 = 0 + 0 \quad 1$$

$$0 \vec{v} = (0 + 0) \vec{v} = 0 \vec{v} + 0 \vec{v}$$

$$0 \vec{v} \in V \text{ וקטור קיים } -0 \vec{v} \text{ כך ש-}$$

$\downarrow$

$$0 \vec{v} + (-0 \vec{v}) = (0 \vec{v} + 0 \vec{v}) + (-0 \vec{v})$$

$$(0 \vec{v} + (-0 \vec{v})) = 0 \vec{v} + (0 \vec{v} + (-0 \vec{v}))$$

$$\vec{0} = 0 \vec{v} + \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{0} = 0 \vec{v}}$$

$$\alpha \vec{0} = \alpha (\vec{0} + \vec{0}) \quad 2$$

$$\alpha \vec{0} = \alpha \vec{0} + \alpha \vec{0}$$

$$-\alpha \vec{0} \text{ וקטור קיים } \alpha \vec{0} \in V$$

$\downarrow$

$$\alpha \vec{0} + (-\alpha \vec{0}) = (\alpha \vec{0} + \alpha \vec{0}) + (-\alpha \vec{0})$$

$$(\alpha \vec{0} + (-\alpha \vec{0})) = \alpha \vec{0} + (\alpha \vec{0} + (-\alpha \vec{0}))$$

$$\vec{0} = \alpha \vec{0} + \vec{0}$$

$$\boxed{\vec{0} = \alpha \vec{0}}$$

3. $\Rightarrow$ הוכחנו 1-2.

$$\alpha \vec{v} = \vec{0} \quad \Leftarrow \text{נכון}$$

נניח $\alpha \in \mathbb{F}, \alpha \neq 0$ ולכן קיים לו הפיכי α^{-1}
נכפיל בו משני האגפים:

$$\alpha^{-1}(\alpha \vec{v}) = \alpha^{-1} \vec{0}$$

$$(\alpha^{-1} \alpha) \vec{v} = \vec{0} \quad \text{לפי 2:}$$

$$(1) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

$$\vec{v} \cdot (-1) = -\vec{v} \quad \text{הרעיון הוא:}$$

$$0 = 0 \vec{v} = (1 - 1) \vec{v} = 1 \cdot \vec{v} + (-1) \vec{v} = \vec{v} + (-1) \cdot \vec{v}$$

$$0 = \vec{v} + (-\vec{v})$$

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \quad \text{לפי 2:}$$

$$-\vec{v} = -1 \cdot \vec{v}$$

משפט: אוסף המטריצות $\mathbb{F}^{m \times n}$ הוא חבורה וקטורית עם פעולות חיבור
מטריצות וכן כפוף כפי שהגדרנו עד עכשיו. $(m, n \in \mathbb{N})$

הוכחה:

$$A, B \in \mathbb{F}^{m \times n} \text{ אזי } A+B \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$A+B=B+A \quad \text{כמו שהראינו.}$$

$$A, B, C \in \mathbb{F}^{m \times n} \text{ הראינו ש:}$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$0_{m \times n} \text{ מקיימת תכונות הדרוש,}$$

$$-A \in \mathbb{F}^{m \times n} \text{ קיים איבר נגדי:}$$

כבר בסקור:

סלריות: $\alpha \in F, A \in F^{m \times n}$

$\Downarrow$

$$\alpha A \in F^{m \times n}$$

אסוציאטיביות: $A \in F^{m \times n}, \alpha, \beta \in F$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

כינוס: $A, B \in F^{m \times n}, \alpha, \beta \in F$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

רבי-המשבט, $R^{n \times 1} = R^n$ מרחב וקטורי מעל R ,
 R^n אינו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ וזוהא, כי אין סגירות לכפל בסקלר.

הארה:

יהי V מרחב וקטורי מעל F .

$U \subseteq V$ הוא גר מרחב על V

אם U הוא מרחב וקטורי מעל F הים תכונות על V

ונסמן $U \leq V$.

קולמני:

$GL_n(F)$ - אוסף כל המטריצות ההפיכות ה- $F^{n \times n}$.

יקום $e \in F^{n \times n}$ -

$GL_n(F)$ אינו גר מרחב וקטורי!

1. מטריצת האפס $0_{n \times n} \notin GL_n(F)$ זכן אין איבר נגדי.

2. $-I, I \in GL_n(F)$ אבל $-I + I = 0_{n \times n} \notin GL_n(F)$ זכן אין סגירות תחתית.

טענה:

$$\vec{0}_u = \vec{0}_v \quad \text{אם } u \leq v$$

↑ וקטור האפס של u ↑ וקטור האפס של v

הוכחה:

י"ה $\vec{u} \in U$, $0 \in F$

$\vec{u} \in V$ וכן $u \subseteq v$

נבא:

$$0 \cdot \vec{u} = \vec{0}_v$$

מש $\vec{u} \in U$

$$0 \cdot \vec{u} = \vec{0}_u$$

אבל:

$$\vec{0}_u = \vec{0}_v$$

ולכן:

הסקרה:

אם $u \leq v$ אבל $\vec{0}_v \notin u$ אז $u \neq v$

קריטריון מקוצר למחמ

י"ה V מחמ וקטורי מן שדה F

$u \subseteq v$ הוא מחמ וקטורי של V

אם ורק אם:

1. $u \neq \emptyset$

2. $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in u \implies \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in u$

3. לכל $\alpha \in F$ ולכל $\vec{u} \in u$ $\alpha \vec{u} \in u$

הוכחה:

אם u מחמ של V

יפה:

1. $\vec{0}_v \in u$ ולכן $u \neq \emptyset$

2, 3. מחמ"מים כי u הוא מחמ וקטורי מתקיים סגור תחת

לכפל בסקלר.

צד שני:

יקום מתקיימים 1, 2, 3 וצ"ל u מתקיים על V :

א' פור:

סלירות: נתון.

גילוינות: יקום $u \subseteq V$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in u$
 $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}_2 + \vec{u}_1$ מתקיים ב- V

ולכן מתקיים ב- u . (ירושל).

אסוציאטיות: ירושה $V-N$.

איבר נייטרלי:

נבחר $\vec{u} \in u$. לפי גימור 3 יש סגור לכל בסקר.

נקח $\alpha = 0$, $0 \cdot \vec{u} \in u$

אם $\vec{u} \in V$ ולכן $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}_V$

$\Rightarrow \vec{0}_V \in u$

בפרט אנו יודעים $u \neq \emptyset$.

נצ"מ:

לפי סלירות: לכל $-1 \cdot \vec{u} \in u$

אם חיי יקום יש: $-1 \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

ולכן: $-\vec{u} \in u$

שאר הגימורים על כל בסקר נקרא גימור $V-N$.
לכן מספיק להראות את הקריטריון המקורי לפי מרג.

הקריטריון המקוצר:

$V \subseteq U$ הוא גר מרחב וקטורי של V אם:

1. $\vec{0} \in U$
2. לכל $\alpha \in F$, $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$
מקיים: $\vec{u}_1 + \alpha \vec{u}_2 \in U$

גר מרחבים תת-ווקאליים:

1. הי קטן: $\{\vec{0}\}$
2. הי גדול: V

הצגה: $A \in F^{n \times m}$ גר $H = \{\vec{v} \in F^n \mid A\vec{v} = \vec{0}\}$ - אוסף הגורמים של המרחב הווקאלי.

כחוק $H \subseteq F^n$

הוכחה: $H \subseteq F^n$

הוכחה: לפי הקריטריון המקוצר:

1. $\vec{0} \in F^n$ מקיים $A\vec{0} = \vec{0}$ ולכן $\vec{0} \in H$

2. יהי $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in H$ ו- $\alpha \in F$

$$A(\vec{u}_1 + \alpha \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + \alpha A\vec{u}_2 = \vec{0} + \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_1 + \alpha \vec{u}_2 \in H$$

לכן $H \subseteq F^n$

דוגמה: $V = \mathbb{R}^3$, $H = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$

$$H \subseteq V = \mathbb{R}^3$$

מסקנה:

כל ישר/משור שצמד בראשית הוא גר מרחב וקטורי של F^n .

משפט: יהי V מרחב וקטורי מעל F .

יהיו $U, W \subseteq V$ מרחבים, אזי $U \cap W$ מרחב על V .

הוכחה:

נראה דבריו הקריטריון המקובל:

1. $\vec{0} \in U, \vec{0} \in W$ כי הם מרחבים.

לכן $\vec{0} \in U \cap W$.

2. $\alpha \in F, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U \cap W$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U$

$\vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2 \in W, \vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2 \in U$

$\Downarrow$

$\vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2 \in U \cap W$

$\Downarrow$

כל $U \cap W \subseteq V$!

(שים לב: $U - W$ מרחב)

משפט: יהיו $U, W \leq V$ גורמים, $U \cap W$ יחידה גורם
וקוויט V .

אין מבט מנקודת מבט אלגוריתמית:

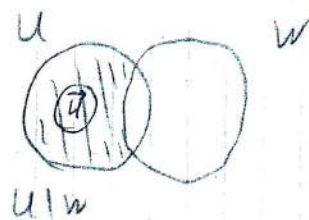
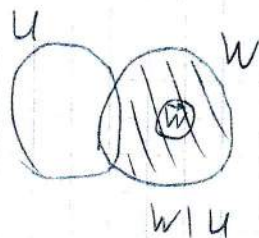
$$W \leq U \quad (\text{שהרי } W \cap U = W)$$

$$U \leq W \quad (\text{שהרי } W \cap U = U)$$

הוכחה: נניח שאין $U \cap W$ גורם, לא מוכח בשטח (אחרת זה טריוויאלי).

עם זאת להוכיח ש- $U \cap W$ יחידה גורם וקוויט
נראה שלא מתקיימת סדרה רציפה:

$$u \in U, w \in W \Rightarrow u+w \notin U \cap W$$



$$u + w \notin U \cap W \quad - e$$

$$u + w \in U \cap W \quad - e$$

לכן יש לנו סתירה:

$$u + w \in W$$

$$u + w \in U$$

$$w \in W$$

$$u \in U$$

$$w \in W$$

$$u \in U$$

$$-w \in W$$

$$-u \in U$$

$$(u+w) + (-w) \in W$$

$$(u+w) + (-u) \in U$$

$$\Rightarrow u \in W$$

$$u \in U$$

בסתר לכן יש:

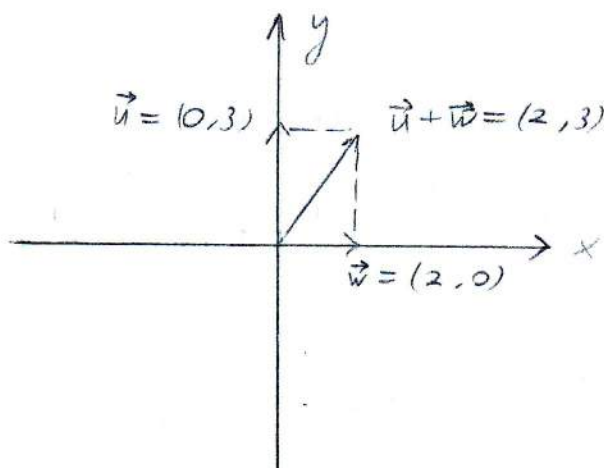
$$u \in U$$

$$u \in U \cap W$$

$$u \in U \cap W$$

בסתר!

$$V = \mathbb{R}^2 \quad \text{על } \mathbb{R} \quad \text{מרחב וקטורי}$$



$$\begin{aligned} U &= \{(0, y)\} - \text{ציר } y \\ W &= \{(x, 0)\} - \text{ציר } x \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{מרחב וקטורי} \\ \text{על } \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$$

$$U \cup W = \text{איחוד של הצירים}$$

$$\vec{u} + \vec{w} \notin U \cup W \quad \text{ערה:}$$

הצגה: סכום של מרחב וקטוריים;

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, $U, W \subseteq V$ מרחב וקטוריים,

$$U + W = \{ \vec{u} + \vec{w} \mid \vec{u} \in U, \vec{w} \in W \}$$

שאלה: $U + W$ הוא מרחב וקטורי על V .

הוכחה: נראה את הקריטריון המקובל:

$$1. \quad \vec{0}_U \in W, \vec{0}_W \in U$$

$$\vec{0}_U + \vec{0}_W = \vec{0}_V \in U + W$$

$$2. \quad \vec{t}_1, \vec{t}_2 \in U + W \quad \alpha \in \mathbb{F}$$

$$\vec{u}_1 \in U, \vec{w}_1 \in W - \text{ע} \quad \text{כך } \vec{t}_1 = \vec{u}_1 + \vec{w}_1 \quad \text{וכן } \vec{t}_1 \in U + W$$

$$\vec{u}_2 \in U, \vec{w}_2 \in W - \text{ע} \quad \text{כך } \vec{t}_2 = \vec{u}_2 + \vec{w}_2 \quad \text{וכן } \vec{t}_2 \in U + W$$

$\Downarrow$

$$\vec{t}_1 + \alpha \vec{t}_2 = (\vec{u}_1 + \vec{w}_1) + \alpha(\vec{u}_2 + \vec{w}_2) = \vec{u}_1 + \vec{w}_1 + \alpha \vec{u}_2 + \alpha \vec{w}_2 =$$

$$= (\vec{u}_1 + \alpha \vec{u}_2) + (\vec{w}_1 + \alpha \vec{w}_2) \in U + W$$

עוד נראה $\vec{w}_1 + \alpha \vec{w}_2 \in W$ ו- $\vec{u}_1 + \alpha \vec{u}_2 \in U$ מרחב וקטוריים על U ו- W .

↓
 יכן $u+w$ הוא u מרחב וקטורי

לדבר:

$u+w$ הוא u מרחב וקטורי כי לכל u וכל w ,

הוכחה:

לכל u וכל w $u+w \in T$ הוא u מרחב וקטורי u, w
 כל $u+w \in T$

הוכחה: יהי $v \in u+w$ לכל u וכל w v כך:
 $v = u + w$

יכן: $w \in w \subseteq T$, $u \in u \subseteq T$
 $v = u + w \in T$

יכן $u+w \subseteq T$

תוספת ויניארי / שדה

V מרחב וקטורי מעל שדה F .

תכונות:

$$U, W \leq V$$

$$U + W = \{ \vec{u} + \vec{w} \mid \vec{u} \in U, \vec{w} \in W \}$$

השקרה:

נניח $T = U + W$, יאל T נקרא סכום ישיר של U ו- W

אם $U \cap W = \{ \vec{0} \}$ נאמר סכום ישיר

$$U \oplus W$$

דוגמה:

$$\mathbb{R}^3$$

$$U = \{ (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$W = \{ (0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus W$$

$$(x, y, z) = \underbrace{(x, y, 0)}_{\in U} + \underbrace{(0, 0, z)}_{\in W}$$

$U \cap W = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ האיבר היחיד השכיף השניים

תכונה חשובה של סכום ישיר:

$$T = U + W$$

$$\vec{t} = \underbrace{\vec{u}}_{\in U} + \underbrace{\vec{w}}_{\in W}$$

אם $\vec{t} \in T$ קיימת הצגה יחידה של $T = U \oplus W$

הוכחה:

$$T = U \oplus W$$

ייתכן $\Leftarrow$

$$\vec{t} = \vec{u}_1 + \vec{w}_1$$

$$-1 \quad \vec{t} \in T$$

נניח

$$\vec{t} = \vec{u}_2 + \vec{w}_2$$

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad \vec{w}_1 = \vec{w}_2$$

1.3

$$\vec{u}_1 + \vec{w}_1 = \vec{u}_2 + \vec{w}_2$$

$$\begin{matrix} \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{w}_2 - \vec{w}_1 \\ \in U \quad \quad \in W \end{matrix}$$

כי U ו- W מרחבים הסלורים ואינם יכולים להיות

אלא יקרה $T = U \oplus W$ כלומר

$$U \cap W = \{\vec{0}\}$$

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{w}_2 - \vec{w}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2$$

$$\vec{w}_2 = \vec{w}_1$$

לכן לא תלמד 'אידה

$\Rightarrow$ נניח שקיימת תלמה 'אידה.

יהי $\vec{v} \in U \cap W$ לכן $\vec{v} \in U$ וכן $\vec{v} \in W$

$$\begin{matrix} \vec{v} = \vec{0} + \vec{v} \\ \in U \quad \in W \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} \\ \in U \quad \in W \end{matrix}$$

אלא יקרה ש'ע' תלמה 'אידה

$$\begin{matrix} \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{0} \\ \in U \quad \in W \quad \in U \quad \in W \end{matrix}$$

1.4

$\Downarrow$

$$\vec{v} = \vec{0}$$

$\Downarrow$

$$U \cap W = \{\vec{0}\}$$

השקרה: צירוף ליניארי:

יהיו $v_1, \dots, v_n \in V$ וקטורים במרחב וקטורי V .
יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ סקלרים כלשהם.

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

נקרא צירוף ליניארי של $\{v_1, \dots, v_n\}$.

דוגמה:

$$\left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$$

תוצאה:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

הוקטור $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ הוא צירוף ליניארי של $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ הוא צירוף ליניארי שלהם כי } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \vec{v}_1 + 0 \vec{v}_2 + 0 \vec{v}_3$$

ובאופן כללי, צורה של v_1, v_2, v_3

תקבלה יש אינסוף צירוף (מחז' שדה אינסופי).

הערה חשובה:

וקטור ה-0 הוא צירוף ליניארי של כל קבוצת וקטורים

$$\text{עבור הסקלרים } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

השורה:

קבוצה $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ נקראת משפחה (בסיס) אם קיים זיכרון אינדיבידואלי $\vec{0} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

כך שכל אחד מהם $\alpha_i \neq 0$

אם לא קיים זיכרון אינדיבידואלי כלל, כלומר כל הסקאלרים $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ הריא

הזיכרון האינדיבידואלי האינדיבידואלי $\vec{0} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$ נשאר שהקבוצה

A היא משפחה אינדיבידואלי (בסיס). זיכרון זה כל הסקאלרים הם 0

נקרא זיכרון אינדיבידואלי.

השורה:

אם קבוצה A מכילה משפחה $\vec{0}$ היא משפחה אינדיבידואלי.

הסקר: $A = \{\vec{0}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$

נבחר $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0, \alpha_0 \neq 0$

$$\alpha_0 \vec{0} + 0 \vec{v}_1 + \dots + 0 \vec{v}_n = \vec{0}$$

זיכרון אינדיבידואלי לא אינדיבידואלי. ולכן הקבוצה משפחה אינדיבידואלי.

אבלו הקבוצה $\{ \vec{0} \}$ היא משפחה אינדיבידואלי!

דוגמאות:

1. $V = \mathbb{R}^2, A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ משפחה אינדיבידואלי.

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

2. $\mathbb{R}^3 \supseteq A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ \frac{1}{3}R_3 \rightarrow R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2 - 4R_3 \rightarrow R_2 \\ R_1 + R_3 \rightarrow R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

קבלנו $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ כל משפחה משפחה משפחה.

$$3. \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן גיל.

$$4. \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$$

ולכן גיל.

המשפט:

נניח $e = \{v_1, \dots, v_n\}$ גלויים ליניאריים וכלים שונים מ- $\vec{0}$.
היחס שקיים $1 \leq i \leq n$ כך v_i נגזר מהצבה כזו של שאר הוקטורים.

הוכחה:

היות ו- $\vec{0}$ היא נמצאת לפחות שני סקלרים $\alpha_i, \alpha_j \neq 0$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_i \vec{v}_i + \dots + \alpha_j \vec{v}_j + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

נעביר את $\alpha_i \vec{v}_i$ אל הצד השמאלי:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_{i-1} \vec{v}_{i-1} + \alpha_{i+1} \vec{v}_{i+1} + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = -\alpha_i \vec{v}_i$$

$\alpha_i \neq 0$ ולכן נגזר מהצבה $-\alpha_i$ ונקבל:

$$\frac{\alpha_1}{-\alpha_i} \vec{v}_1 + \dots + \frac{\alpha_n}{-\alpha_i} \vec{v}_n = \vec{v}_i$$

ולכן קיבלנו שהצירוף הליניארי הנ"ל הוא טריוויאלי. $\frac{\alpha_j}{-\alpha_i} \neq 0$

משפט:

1. יהיו $v_1, \dots, v_n$ וקטורים שונים
אלו יהיו $v_1, \dots, v_n$ בלתי קבוצה המכילה אותם בלי להיות ליניאריים.

2. קיימת קבוצה S כך $e - 1 \leq \#S \leq n$ ו- S היא בלי להיות ליניאריים.
(כמו למשל $n=1$)

הוכחה:

1. $\Leftrightarrow$ אם $v_1, \dots, v_n$ בלי להיות ליניאריים אז קיימת S כך

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

אם $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ קיים S בלי להיות ליניאריים:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n + 0 \vec{w}_1 + \dots + 0 \vec{w}_2 = \vec{0}$$

אכן S בלי.

$\Rightarrow$ כל קבוצה המכילה אותם בלי להיות ליניאריים,

היא $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה המכילה רק אותם בלי

אז וכן קיים S בלי להיות ליניאריים:

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

ומכאן $e - 1 \leq \#S \leq n$ בלי.

2. נגדיר $S = \{\vec{0}\}$ בלי! (הראינו).

הגדרה:

'ה' V מרחב וקטורי מעל שדה F .

בהי $\emptyset \neq S \subseteq V$,

המרחב הנפרש על S מיומן $\text{Span}(S) = S_p(S)$

ומכיל את כל וקטור v ב- V אשר ניתן לכתובו כסכום ליניארי של איברי S .

אם $S = \emptyset$ אז $S_p(\emptyset) = \{\vec{0}\}$

דוגמאות:

$$1. \quad V = \mathbb{R}^2, \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_p(S) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$2. \quad V = \mathbb{R}^3, \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_p(S) = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

מישור $[xy]$ ב- $\mathbb{R}^3$.

המשפט הראשון:

אם $S_p(S) = V$ נאמר ש- S פורשת את V וזו $v \in V$ נפרש מ- S ידוע ש-

דוגמאות:

הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^2$ כי $S_p(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}) = \mathbb{R}^2$

הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ אינה פורשת את $\mathbb{R}^2$ כי

$$S_p(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}) = x$$

הכללה:

V ו' $V \subseteq S$ קבוצה
 $S_p(S)$ היא מרחב וקטורי על V .

הגדרה:

אם $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ הנקראות:

$$S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \quad \text{כי } \vec{0} \in S_p(S). \\ \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \in S_p(S) \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

2. יהיו $w_1, w_2 \in S_p(S)$, $\alpha \in F$.

$$w_1 \in S_p(S) \quad \text{אכן קיימים } \beta_1, \dots, \beta_n \in F \\ w_1 = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n \quad \text{כך } -$$

$$w_2 \in S_p(S) \quad \text{אכן קיימים } \gamma_1, \dots, \gamma_n \in F \\ w_2 = \gamma_1 \vec{v}_1 + \dots + \gamma_n \vec{v}_n \quad \text{כך } -$$

$\Downarrow$

$$\vec{w}_1 + \alpha \vec{w}_2 = (\beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n) + \alpha (\gamma_1 \vec{v}_1 + \dots + \gamma_n \vec{v}_n) = \\ = (\beta_1 + \alpha \gamma_1) \vec{v}_1 + \dots + (\beta_n + \alpha \gamma_n) \vec{v}_n$$

זיהו איברי $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ וכן

$$\vec{w}_1 + \alpha \vec{w}_2 \in S_p(S)$$

הערה:

$Sp(S)$ הוא גרם המרחב הקטן ביותר שמכיל את S .

דוכמה:

נניח T גרם מרחב כך $S \subseteq T$ (קבוצה שמכילה את S מרחב T)
 נוכח ש $Sp(S) \subseteq T$.

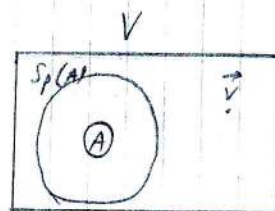
$\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$ כיוון $\vec{w} \in Sp(S)$ יהי $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$
 T גרם מרחב ולכן שמרצ סגור ליניארי וכן הסקנו לכן $\vec{w} \in T$
 מכאן $Sp(S) \subseteq T$.

משפט:

יהי V מרחב וקטורי, $A \subseteq V$ קבוצה,
 אם A גרם $A \subseteq V$ ש"מ ברמה A אזי לכל $\vec{v} \in V \setminus Sp(A)$
 הקבוצה $\{A, \vec{v}\}$ היא גרם.

ב. יחס A גרם אזי לכל $\vec{v} \in A$ מתקיים $\{A, \vec{v}\}$ י"מ ברמה A , V .

המחשה:



דוגמה:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ גרם}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin Sp(A)$$



$$\text{גרם } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

הוכחה:

א. נניח שהלכה e -צד $A \cup e$ גל.

אם A גל, אז $\vec{v}$ צד A ויש $\vec{v} \in S_p(A)$.

כלומר $\vec{v} \in S_p(A)$.

בסעיף אחרון e -צד $V \setminus S_p(A)$.

ב. נניח שהלכה e -צד $A \setminus e$ כורה גל V .

כלומר $S_p(A \setminus e) = V$.

הכלל $e \in S_p(A \setminus e)$ גל.

אם $\{e\} \cup S_p(A \setminus e)$ גל.

אם $A \setminus e \cup S_p(A \setminus e) = A$ וזה גל A גל בסעיף!

משפט ההלכה של טיילור:

אם B קבוצה כורה של V ו- $A \subseteq V$ גל.

אז לכל $e \in A$ קיים $\vec{v} \in B$ כך e :

$\vec{v} \in A \setminus e$ וזה $A \setminus e$ גל.

דוגמה:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^2$$

נניח שהלכה $A \setminus e$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ גל.

הוכחה:

נניח במילה שקיים $\vec{a} \in A$ כך שלכל $\vec{b} \in B$ מתקיים
 $\vec{b} \in A \cup \{\vec{a}\}$ או $\vec{b} \in A \cup \{\vec{a}\} \cup \{\vec{b}\}$

יהי $\vec{b} \in B$, אם $\vec{b} \in A \cup \{\vec{a}\}$ אזי $\vec{b} \in S_p(A \cup \{\vec{a}\})$
 אם $\vec{b} \in A \cup \{\vec{a}\} \cup \{\vec{b}\}$ אזי $\vec{b} \in S_p(A \cup \{\vec{a}\})$

כלומר בכל מקרה: $\vec{b} \in S_p(A \cup \{\vec{a}\})$

לכן מתקיים $B \subseteq S_p(A \cup \{\vec{a}\})$

אם B קבוצה פורשת

$$S_p(B) = V$$

$$\Downarrow$$

$$S_p(B) \subseteq S_p(A \cup \{\vec{a}\})$$

$$\Downarrow$$

$$V \subseteq S_p(A \cup \{\vec{a}\})$$

הכיוון הפוך של הכללה טריוויאלי ולכן

$$V = S_p(A \cup \{\vec{a}\})$$

כלומר $A \cup \{\vec{a}\}$ חפשי את V בסגירה למסלול הקודם!

מסקנה:

אם B קבוצה פורשת, A קבוצה בגודל

$$|A| \leq |B|$$

הוכחה:

נניח $A = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$, $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$

לפי מסלול ההתאמה קיים i_1 כך ש:

$$A_1 = A \cup \{\vec{b}_{i_1}\} = \{\vec{b}_{i_1}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$$

כחוקה $|A_1| = |A|$, $n \in \mathbb{N}$ משך צמוד A_1 : לפי מסלול ההתאמה

קיים i_2 כך ש: $A_2 = A_1 \cup \{\vec{b}_{i_2}\} = \{\vec{b}_{i_1}, \vec{b}_{i_2}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ בגודל

$$|A_2| = |A|$$

$n \in \mathbb{N}$ משך כך באוגדה צורה ונקבל בשלב ה- n $A_n = \{\vec{b}_{i_1}, \dots, \vec{b}_{i_n}\}$ בגודל $|A|$

$$|A_n| = |A|$$

$$A_n \subseteq B$$

כל



$$|A| = |A_n| \leq |B|$$

$$|A| \leq |B|$$

$\in \mathbb{N}$

הוכחה:

$B \subseteq V$, B נקראת בסיס של V אם:

1. B ג"ל

2. B מורכב מ- V .

דוגמאות:

1. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$ $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$ (אנחנו שמים את $\mathbb{R}^2$)

3. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^{m \times n}$, וקטורים עבור $V = \mathbb{R}^{2 \times 3}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4. הבסיס של $\{\vec{0}\}$ הוא $\emptyset$.

משפט:

יהיו A, B בסיסים שונות של V $|A| = |B|$

הוכחה:

$$|A| \leq |B| \quad \begin{cases} A \text{ בסיס, } B \text{ קטן יותר} \\ B \text{ בסיס, } A \text{ קטן יותר} \end{cases}$$

$$|B| \leq |A| \quad \begin{cases} A \text{ בסיס, } B \text{ קטן יותר} \\ B \text{ בסיס, } A \text{ קטן יותר} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$|A| = |B|$$

הגדרה:

הממדי של V הוא מספר האיברים בבסיס V $\dim(V)$.

בסיס / עמוד 7

הקדמה: יהי V מרחב וקטורי מעל F

נניח B בסיס של V

$$\dim_F V = n = \#B$$

לפיכך המימד של המרחב V מעל F הוא n .

דוגמאות:

1. $V = \mathbb{R}^3$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$$

2. $V = \mathbb{C}^2$

$\mathbb{C}^2$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} = (a+bi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (c+di) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ הוא בסיס של $\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{C}$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$$

$\mathbb{C}^2$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

לכן B היא בסיס של $\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{R}$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$$

השקרה:

מרחב V נקרא נוצר סופי אם יש לו קבוצה בורשה

סופית.

כלומר $\dim_F V < \infty$.

משל

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F . $B \subseteq V$.

1. אם B היא בג' מקסימלית אזי B בסיס.

2. אם B היא בורשה מינימלית אזי B בסיס.

הוכחה:

1. B בג' מקסימלית. כלומר אם נוסיף ל- B עוד וקטור היא ג'יה ג'.

על מנת להראות ש- B בסיס צריך להראות ש- B בורשה, כלומר

$$\text{Span } B = V$$

יהי $v \in V \setminus B$

הקבוצה צ'עצ'ט היא ג' כי B בג' מקסימלית.

$\Leftarrow v \in \text{Span } B$ (שהרי צ'עצ'ט ג', כלומר ניתן להביא את v כצ'י של הוקטורים ב- B).

$\Leftarrow V \subseteq \text{Span } B \subseteq V$ (שהרי הוכחנו $B \subseteq \text{Span } B$ וידוע ש- $\text{Span } B \subseteq V$).

$$\text{Span } B = V \quad \Leftarrow$$

כלומר B בורשה את V

$\Leftarrow B$ בסיס של V .

2. B קרסר מינימלי, כלומר $\text{span } B = V$ (וקלור B - N הינו כבד N גרדו

יאל V .

על מנת להדגיש B -בסיס B ל.ב. B גרד.

נניח שהיה B -גרד.

לוא יומחר שקיים $\vec{b} \in B$ כך $\vec{b} \in \text{span}(B \setminus \{\vec{b}\})$

אכן $B \subseteq \text{span}(B \setminus \{\vec{b}\})$ (שהרי $\text{span}(B \setminus \{\vec{b}\}) \subseteq \text{span}(B)$ ואם $\vec{b} \in \text{span}(B \setminus \{\vec{b}\})$)

$\Leftarrow \text{span } B \subseteq \text{span}(B \setminus \{\vec{b}\})$ משום $B \subseteq \text{span}(B \setminus \{\vec{b}\})$ הוא גרד המרגר הקטן

ביותר שכלול B .

אבל $V = \text{span } B$ שד נכון B -קרסר!

$V \subseteq \text{span}(B \setminus \{\vec{b}\}) \Leftarrow$

$V \subseteq \text{span}(B \setminus \{\vec{b}\}) \subseteq V \Leftarrow$

$\text{span}(B \setminus \{\vec{b}\}) = V \Leftarrow$

בסגירה אכן B -קרסר מינימלי.

$\Leftarrow B$ גרד

$\Leftarrow B$ גרד וקרסר $\Leftarrow B$ בסיס.

הכלל גרד

$W \subseteq V$, $W = \text{span } W$

הוכחה:

ידוע $W \subseteq \text{span } W$.

יהי $\vec{x} \in \text{span } W$ אכן

אבל $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ כואר $\vec{x} = \sum \alpha_i w_i$ שדרי $w_i \in W$ וקלור וקטן סגור תגידור וכד

בסקר. אכן $\vec{x} \in W$ ו- $\text{span } W \subseteq W$.

מכאן שקרסר מכלול W כיוונר $W = \text{span } W$.

(הערה: $\text{span}(\text{span}(T)) = \text{span}(T)$)

מסל:

יהי V מ"ו ממ"ד F נוצר סופי

1. אם S פורש סופי אזי S מכיל בסיס.
2. אם $S \subseteq V$ קבוצה פורש (או קווקא בג"ל) אזי $\dim V \leq |S|$.

הוכחה:

1. נניח S פורש.

אם S פורש מינימלי $\Leftrightarrow S$ בג"ל לפי משל קרדן ולכן S בסיס וסיימנו.

אגב, ק"מ $S \not\subseteq S_1$, $|S_1| < |S|$ כל S_1 פורש.

אם S פורש מינימלי סיימנו.

אם לא, נגזור על החיץ עד שנקבל S_1 חד-ממדי.

$S_1 \not\subseteq S$, $|S_1| < |S|$ פורש מינימלי ולכן בסיס. $S_2 = \emptyset$ שרש בסיס אמ"ל במכיל את וקטור הבסיס, כלומר $\{\vec{e}_i\}$.

דוגמה:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

S פורש ולכן מכיל בסיס.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

S_1 פורש אבל לא מינימלי $\Leftrightarrow$ ג"ל.

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

S_2 פורש מינימלי! ולכן S_2 בסיס 1 -ממדי. $S_2 \not\subseteq S$.

הערה: הבסיס של מ"ו מכיל רק את וקטור הבסיס הוא $\emptyset$.

דוכמה:

2. אם S פורש (לאו דווקא בגלל) את V , S מכילת בסים: S .

$$S_1 \subseteq S, |S_1| \leq |S|$$

$$\dim V = |S_1| \quad \text{אם}$$

$$\dim V \leq |S| \quad \text{אם}$$

הערה:

יהי V מרחב וקטורי, $B \subset V$, אם B מכילת בסים, אז B היא בסיס.
אם B מכילת בסים, אז B היא בסיס.

$$|B| = \dim V, 1$$

$$B \text{ פורש את } V, \text{ כלומר } \text{Span } B = V, 2$$

$$B \text{ בגלל, } 3$$

דוכמה:

$$1 \Leftarrow 2+3$$

$$\dim V \leq |B| \quad \text{אם } \text{Span } B = V$$

$$B \text{ בגלל} \quad \text{אם } \dim V \geq |B| \quad (\text{כי בגלל מקסימליות היא בסים})$$

$$\downarrow \\ \dim V = |B|$$

$$3 \Leftarrow 1+2$$

נניח B פורש, מספיק להראות B היא בסיס.
נניח $B_1 \subset B$ היא בסיס, לא אומרת שיש $B_1 \subset B$.

$$\text{כך } \text{Span}(B_1) = \text{Span}(B) = V$$

$$|B_1| < |B| = \dim V \quad B_1 \subset B$$

אז B_1 אינו בסיס

כלומר קיבלנו B_1 בסיס כך $|B_1| < \dim V$ ולכן סתירה!

אכן B פורש בסיס, ולכן B היא בסיס.

$$2 \leftarrow 1+3$$

האם B היא בסיס? נבדוק B היא מקסימלית.
 נניח $B \subsetneq B_1$ (כלומר B לא היא מקסימלית), אז קיימת $B \subsetneq B_1$
 $|B| < |B_1|$

כך B_1 היא מקסימלית ולכן B_1 בסיס V .
 $\dim V = |B| < |B_1|$ סתירה
 לכן B היא בסיס

קיימת B_1 היא בסיס V ו- $|B| < |B_1|$ סתירה
 $\dim V$.

לכן B היא מקסימלית ולכן בסיס.

דוגמה:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad V = \mathbb{R}^2, 1$$

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 = |B|$$

B היא בסיס.

מבחינת $\mathbb{R}^2$ 2 ממדים 3 וקטורים "רשמי" וכן B בסיס $\mathbb{R}^2$
 ולכן B בסיס.

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, 2$$

$$\text{Span } C = ?$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & b \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & b-2a \end{array} \right)$$

$$b-2a=0 \text{ רק אם } b=2a$$

$$\text{Span } C = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{כלומר}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad 3.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 4 & b \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & -2 & b - 2a \end{array} \right)$$

המחצית פה?!

אכן, אבל $a, b \in \mathbb{R}$ שניהם קיימים בהכרח.

$$\Rightarrow \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$$

מרחב פולינומים:

$$\mathbb{P}_n[x] = \{ a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R} \}$$

$$\mathbb{P}_2[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in \mathbb{R} \}$$

הבסיס הסטנדרטי הוא $\{1, x, x^2\}$

$$\dim \mathbb{P}_n[x] = n+1 \quad \text{אכן}$$

פולינום לא מוגדר סופית:

$$\mathbb{P}[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \mid a_i \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{P}[x] - \mathbb{P}_n[x]$ וקטורי ממימד אינסופי, ולכן הוא אינו שייך למונח סופי!

אכן לא ניתן להגדיר פולינום אינסופי!

הכרחי:

י"ד. V ו' U מרחב סופי, $U \leq V$, U מרחב וקטורי. 3.1

$$\dim U \leq \dim V \quad \text{א.}$$

$$, U = V \Leftrightarrow \dim U = \dim V \quad \text{ב.}$$

הוכחה:

א. כל קבוצה שמינמלית V , גרמל ריו למ פורמ יל U (ולמ מרמל)

לכן, הפורמ המינמלית של U קלמ יל שול לפורמ המינמלית של

$$V \text{ ולכן } \dim U \leq \dim V \text{ (הסבר).}$$

הוכחה:

נמל B ריו בסיס של U .

נ"קו $\vec{v} \in V \setminus U$ (למ $U < V$ - קים וקלר כלל).

למ לא - $U = V$ ולל $\dim U = \dim V$.

נמל שקים וקלר כלל $B_1 = B \cup \{\vec{v}\}$ גל (למי מכלים קודמים)

למ B_1 ריו בסיס של V ולל $|B_1| > |B|$

למ B_1 אינל בסיס - נמל להמלן ולמלמל יל B_1 ל- B_k

יכל B_k - בסיס ל- V .

$$\dim V = |B_k| > |B| = \dim U$$



$$\dim V > \dim U$$

$$\dim V \geq \dim U \quad \text{בסר הכל}$$

$$\dim U = \dim V$$

אכן הבורסה המינימלית של U היא גם הבורסה המינימלית של V .

$$V \subseteq U$$

ממילא:

נניח B - בורסה מינימלית של U , כלומר B בסיס של U .

$$|B| = \dim U = \dim V$$

בהכרח B בג'ל V וזה $\dim V = |B|$

ולכן B בורסה אף V לפי הפעלים גינה.

אכן B בסיס של V .

$$U = \text{Span} B = V \quad \Leftarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{U = V}$$

דוגמה נוספת:

$$V = \mathbb{R}^3 \quad 1.$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y - z = 0 \right\}$$

$$z = x + y$$

$\Downarrow$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{לדוגמה}$$

B בורסה אף W וכן הוקדוהים מה בג'ל (ברך אברהם!)

אכן לפי הפעלים גינה הם בסיס של W

$$\dim W = 2 \quad \Leftarrow$$

W ג'ל $\mathbb{R}^3$ ממ'מ'מ' 2 בג'ל $\mathbb{R}^3$.

משפט היחידות ההצטברות:

יהי V מרחב וקטורי מעל F , $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V .
אם לכל $\vec{v} \in V$ קיימת הצגה יחידה, כלומר קיימת דרך אחת ויחידה

לכתוב $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ סקלרים

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \quad \text{כך ש-}$$

הוכחה:

נניח שהצגה שקיימת של הווקטור $\vec{v}$ וקטור

ללא אחרות של סקלרים $\beta_1, \dots, \beta_n$

$$\vec{v} = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n \quad \text{כך ש-} \quad (\text{מכיוון ש- } B \text{ בסיס של } V)$$

$\Downarrow$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \beta_1 \vec{v}_1 + \dots + \beta_n \vec{v}_n$$

$$(\alpha_1 - \beta_1) \vec{v}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{אזכור: נקודת זרימה}$$

אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ומהלך זה

$$\Rightarrow \alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1$$

$\vdots$

$$\alpha_n = \beta_n$$

משפט המ'נקים:

יהי V מרחב וקטורי מעל F , $U, W \leq F$,

אזי מתקיים:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

הוכחה:

נניח B_0 בסיס עבור $U \cap W$

$$B_0 = \{v_1, \dots, v_k\}$$

$$\dim(U \cap W) = k$$

בנוסף:

הרחב B_0 ל- B_1

$$B_0 \subseteq U$$

נשלים את B_0 לבסיס B_1 של U

$$B_1 = B_0 \cup \{u_1, \dots, u_t\}$$

$$\dim U = k + t$$

כעת

נאריך B_0 ל- B_2 , $B_0 \subseteq W$

נשלים את B_0 לבסיס B_2 של W

$$B_2 = B_0 \cup \{w_1, \dots, w_r\}$$

$$\dim W = k + r$$

אז

$$B = B_1 \cup B_2$$

נראה

$$|B| = |B_1| + |B_2| - |B_0|$$

$$|B| = (k+t) + (k+r) - k =$$

$$= k + t + r$$

הסביר שהבסיס B של $U+W$

$$B \subseteq U+W$$

נראה כי B היא בסיס של $U+W$:

$$\text{Span } B = \text{Span}(B_1 \cup B_2) = \underbrace{\text{Span } B_1}_U + \underbrace{\text{Span } B_2}_W =$$

$$= U + W$$

הוכחה/הנחה:

נראה $B = \{0\}$

$$* \quad \underbrace{\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_{1-k} \vec{v}_{1-k}}_{\vec{v} \in U \cap W} + \underbrace{\beta_1 \vec{u}_1 + \dots + \beta_t \vec{u}_t}_{\vec{u} \in U} + \underbrace{\gamma_1 \vec{w}_1 + \dots + \gamma_r \vec{w}_r}_{\vec{w} \in W} = \vec{0}$$

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{1-k} = 0$$

לפי 1.3 ב' הסקתנו

$$\beta_1 = \dots = \beta_t = 0$$

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0$$

$\Downarrow$

$$\vec{v} + \vec{u} + \vec{w} = \vec{0}$$

$$\vec{w} = -\vec{v} - \vec{u}$$

$\in W \quad \in U \cap W \quad \in U$

$\Downarrow$

$$\vec{w} \in U \cap W$$

אכן נראה כי $\vec{w}$ נמצא ב- $\{v_1, \dots, v_{1-k}\}$

$$\vec{w} = \delta_1 \vec{v}_1 + \dots + \delta_{1-k} \vec{v}_{1-k}$$

$$1 \leq i \leq 1-k \quad \delta_i \in F$$

נציב זאת במשוואה * במקום W :

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_{1-k} \vec{v}_{1-k} + \beta_1 \vec{u}_1 + \dots + \beta_t \vec{u}_t + \delta_1 \vec{v}_1 + \dots + \delta_{1-k} \vec{v}_{1-k} = \vec{0}$$

$$(\alpha_1 + \delta_1) \vec{v}_1 + \dots + (\alpha_{1-k} + \delta_{1-k}) \vec{v}_{1-k} + \beta_1 \vec{u}_1 + \dots + \beta_t \vec{u}_t = \vec{0}$$

קראנו ב-1.3 כי הוקטורים ב- B_1 מהווים בסיס של U ובפרט $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_t$.

$$\beta_1 = \dots = \beta_t = 0$$

לפי:

נציב זאת ב-*

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_{1-k} \vec{v}_{1-k} + \gamma_1 \vec{w}_1 + \dots + \gamma_r \vec{w}_r = \vec{0}$$

זהו בסיס של B_2 הוקטורים ב- B_2 מהווים בסיס ובפרט $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_r$.

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{1-k} = 0$$

לפי:

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_r = 0$$

אכן $B = \{0\}$

סיכום:

הרעיון B -עבור $u+w$ הוא

ובן הרעיון B -עבור $u+w$

אם הרעיון B גסים $u+w$

$$|B| = |B_1| + |B_2| - |B_0|$$

$$\dim(u+w) = \dim u + \dim w - \dim(u \cap w)$$

הצגה פנימיים

הצגה פנימיים

$$V = \mathbb{R}^2$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 8 / שיעור 8

משפט הממד

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

דוגמה

$$U \neq W \subseteq V, \quad V = \mathbb{R}^3$$

$$\dim U = \dim W = 2$$

$$? \dim(U+W) \quad \text{מה}$$

$$U+W \subseteq V = \mathbb{R}^3$$

$$2 \leq \dim(U+W) \leq 3$$

$$\uparrow$$

$$\uparrow$$

$$\downarrow$$

$$\dim(U \cap W) = 1$$

(משפט הממד)

$$\text{לפיכך, } U+W = \mathbb{R}^3$$

$$\iff \dim(U+W) = 3$$

$$\left[\begin{array}{l} \dim T = \dim V \quad \text{אם } T \subseteq V \\ T = V \end{array} \right] \quad \text{לכאורה}$$

$\mathbb{R}^2$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

הצגה וקטורית לפי בסיס:

השקרה: וקטור ההצגה של $\vec{v} \in V$ לפי בסיס B נקרא על החזרה

יהי וקטור המקדמים כאשר:

$$B = \{ \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \}$$

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n \quad \alpha_i \in \mathbb{F}, \vec{b}_i \in B$$

אזי וקטור המקדמים יסומן $[v]_B$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

לדוגמה:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

וקטור ההצגה לפי בסיס נקרא גם וקטור קואורדינטות.

תכונות הפונקציה ארדיטיס

הערה: הפונקציה ארדיטיס היא ממש מולקולר כי לכל מספר מיקור הפונקציה שומרת על גודל המיקור.

$$\left[\begin{array}{l} \text{דוגמאות ארדיטיס:} \\ f\left(\frac{n}{m}\right) = n + m \\ f\left(\frac{5}{10}\right) = 5 + 10 = 15 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 2 = 3 \end{array} \right]$$

'ה' B ארדיטיס V (נוצר סופי).

$$[V]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_n \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}_V, 1$$

$$V = W \Leftrightarrow [V]_B = [W]_B, 2$$

$$\vec{v} \in V \text{ קיים } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ אולי } 3$$

$$(B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\})$$

$$[V]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{כך } e$$

$$[V]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n \quad \underline{\text{משפט 4}}$$

$$[W]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{w} = \beta_1 \vec{b}_1 + \dots + \beta_n \vec{b}_n$$

משפט

$$[V]_B + r[W]_B = [V + rW]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 + r\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + r\beta_n \end{pmatrix} \quad \alpha_i, \beta_i, r \in \mathbb{F} \quad 1 \leq i \leq n$$

שדה B בסיס ולכן $\vec{0} = 0\vec{b}_1 + \dots + 0\vec{b}_n$ $\Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}_v$ 1
 (כלומר $\vec{v}$ הליניארי הוא האפס)
 $\Leftrightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v} = \vec{w}$ 2
 כלומר $\vec{v} = \alpha_1\vec{b}_1 + \dots + \alpha_n\vec{b}_n = \vec{w}$
 $\Leftrightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [w]_B$

3, 'ג' $\vec{v} = \alpha_1\vec{b}_1 + \dots + \alpha_n\vec{b}_n$ $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$
 $\Leftrightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

4
 $\vec{v} + \gamma\vec{w} = (\alpha_1\vec{b}_1 + \dots + \alpha_n\vec{b}_n) + \gamma(\beta_1\vec{b}_1 + \dots + \beta_n\vec{b}_n) =$
 $= (\alpha_1 + \gamma\beta_1)\vec{b}_1 + \dots + (\alpha_n + \gamma\beta_n)\vec{b}_n$
 $\Downarrow$
 $[\vec{v} + \gamma\vec{w}]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \gamma\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \gamma\beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = [\vec{v}]_B + \gamma[\vec{w}]_B$

הלדקרה - מלריצג מרער

$$C = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}, B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$$

רססרר רר נר V מר F

רררר:

$$[I]_C^B = \begin{pmatrix} [\vec{b}_1]_C & \dots & [\vec{b}_n]_C \end{pmatrix}$$

רררר:

$$[I]_C^B \cdot [V]_B = [V]_C$$

ררררר

רררר:

רררר מררררר:

$$b = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n & b \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \right)$$

$\Leftrightarrow$

רררר:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n & b \end{array} \right) \text{ רררר } \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \right)$$

ררר

$$\left(\begin{array}{ccc} \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \right) = b$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = b$$

$\Leftrightarrow$

$$\vec{b} \in \text{Span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \}$$

$\Leftrightarrow$

$$[I]_C^B \cdot [v]_B =$$

$$B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}, [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

הוכחה:

$$= \begin{pmatrix} [\vec{b}_1]_C & \dots & [\vec{b}_n]_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1 [\vec{b}_1]_C + \dots + \alpha_n [\vec{b}_n]_C =$$

$$= [\alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n]_C =$$

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n \Leftrightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

הוכחה:

$$= [v]_C$$

הוכחה:

הוכחה: המעבר:

$$Q[v]_B = [v]_C \quad \forall v \in V \quad Q \in F^{n \times n}$$

$$Q = [I]_C^B$$

$$[u_i]_B = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{כאשר } \vec{v} \in \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\} \subseteq V$$

$$Q[u_i]_B = [u_i]_C$$

$$Q e_i = [u_i]_C$$

המעבר ה- i של Q

$$[u_i]_C = [I]_C^B [u_i]_B$$

הוכחה:

$$Q \text{ המעבר ה-} i \text{ של } [I]_C^B e_i = [I]_C^B$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [I]_C^B \\ Q \end{array} \right. \text{ למעבר ה-} i \text{ של } Q$$

$$\downarrow \\ Q = [I]_C^B$$

הוכחה:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{B_1} = \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$[I]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{B_2} & \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{B_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{B_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

↓

$$[I]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

: 10/10

$$[I]_{B_2}^{B_1} [\vec{v}]_{B_1} = [\vec{v}]_{B_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1 \\ -3\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$[I]_{B_2}^{B_1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{B_1} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_{B_2}$$

המשפט:

$\forall$ בסיסים B_1, B_2, B_3

$$[I]_{B_2}^{B_1} [I]_{B_1}^{B_3} = [I]_{B_2}^{B_3} \quad (1)$$

הוכחה:

מסביר אחריות:

$$[I]_{B_2}^{B_1} [I]_{B_1}^{B_3} [\vec{v}]_{B_1} = [I]_{B_2}^{B_3} [\vec{v}]_{B_3}$$

הסבר: $\vec{v} \in F^n$ נחמד אחריות $A=B$, מסביר אחריות של $\vec{v}$

מקיים $A\vec{v} = B\vec{v}$, שתי יאל כפרט מקיים עבור $\vec{v} = e_i$

$Ae_i = Be_i$, כלומר $C(A) = C(B)$; ולכן $A=B$

$$[I]_{B_2}^{B_3} \cdot [\vec{v}]_{B_3} = [\vec{v}]_{B_2}$$

3 נ' :

$$([I]_{B_2}^{B_1} [I]_{B_1}^{B_3}) [\vec{v}]_{B_3} =$$

3 נ' :

$$= [I]_{B_2}^{B_1} ([I]_{B_1}^{B_3} [\vec{v}]_{B_3}) =$$

$$= [I]_{B_2}^{B_1} \cdot [\vec{v}]_{B_1} = [\vec{v}]_{B_2}$$

leN

$$[I]_C^B = ([I]_B^C)^{-1} \quad \text{מסקנה:}$$

$$[I]_C^B [I]_B^C = [I]_C^C = I \quad \text{הוכחה:}$$

$$[I]_C^C = ([c'_1]_C \cdots [c'_n]_C) =$$

$$= (e'_1 \cdots e'_n) = I$$

$$[I]_C^B [I]_B^C = I \quad \text{קיבלנו:}$$

$\Leftarrow$ שיהיה מובן על מתיבה שהייתה נ'מין (א) ונ'מין אולי לא הריכה

נ'מין (א) ונ'מין , ולכן $[I]_B^C = ([I]_C^B)^{-1}$

משפט:

יהי V מרחב וקטורי ממדים n ויהיו $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{b} \in V$

יהיו המספרים:

$$\alpha_i \in \mathbb{F} \quad \vec{b} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \quad 1.$$

2. אולי המספרים B של V הקטור $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ הוא בהתאמה

$$A\vec{x} = [\vec{b}]_B$$

$$A = \left([\vec{v}_1]_B \dots [\vec{v}_n]_B \right) \quad \text{כאשר}$$

הוכחה:

1 $\Leftarrow$ 2:

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \quad \text{על ידי}$$

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \left([\vec{v}_1]_B \dots [\vec{v}_n]_B \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1 [\vec{v}_1]_B + \dots + \alpha_n [\vec{v}_n]_B =$$

$$= [\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n]_B = [\vec{b}]_B$$

אולי $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ הוא בהתאמה $A\vec{x} = [\vec{b}]_B$

2 $\Leftarrow$ 1: יהיו $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ הוא בהתאמה $A\vec{x} = [\vec{b}]_B$

$$\left([\vec{v}_1]_B \dots [\vec{v}_n]_B \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [\vec{b}]_B$$

$$\alpha_1 [\vec{v}_1]_B + \dots + \alpha_n [\vec{v}_n]_B = [\vec{b}]_B$$

$$[\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n]_B = [\vec{b}]_B$$

$\Downarrow$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{b}$$

אשר מתייחסת לזוג של וקטור קוורטרנר.

תקראו את שנינו בסיסים בסדר הולכה אינארית על
 . gillert strang

הדפדפה:

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n} \quad \text{אם}$$

$$\vec{r}_i \in \mathbb{F}^{1 \times n} \quad A = \begin{pmatrix} -\vec{r}_1 & - \\ \vdots & \\ -\vec{r}_m & - \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F}^n \supseteq R(A) = \underbrace{\text{Span}\{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_m\}}_{\substack{\text{מרחב השורה} \\ \text{A על}}}$$

$$C_i \in \mathbb{F}^{1 \times m} \quad A = \begin{pmatrix} \vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F}^m \supseteq C(A) = \underbrace{\text{Span}\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}}_{\substack{\text{מרחב העמודה} \\ \text{A על}}}$$

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \supseteq R(A) = \text{Span}\{(1, 2, 3), (1, 2, 4)\}$$

$$\dim R(A) = 2$$

$$\mathbb{R}^2 \supseteq C(A) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim C(A) = 2$$

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס C(A) -

$$\Rightarrow C(A) = \mathbb{R}^2$$

כל הווקטורים הם

ב- $\mathbb{R}^2$, כל

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\dim(R(A)) = \dim(C(A)) = 1$$

בסיס $\{ (1, 2, 3) \}$ למרחב האנכי

בסיס $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ למרחב האנכי

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה:

יהי $\tilde{A}$ כביר המקורל A , כחול שור K ב $R(A)$ על

מש A כחל . לכן $R(A) = R(\tilde{A})$.

כחול שור מש A $C(A)$ כביר ל A , לכן $C(A) \neq C(\tilde{A})$

אוליבר / שיטות 9

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

תזכורת:

מרחב השורות: $R(A) = \text{Span}(\{r_1, \dots, r_m\}) \subseteq \mathbb{F}^n$

מרחב העמודות: $C(A) = \text{Span}(\{c_1, \dots, c_n\}) \subseteq \mathbb{F}^m$

נסמן: $r_r(A)$ = המימד של מרחב השורות

$r_c(A)$ = המימד של מרחב העמודות

המלמה הקריבית אובי: $r_r(A) = r_c(A)$

הערה:

א. למערכת $Ax = b$ יש פתרון.

ב. $b \in C(A)$

ג. למערכת A ואנדרגט $(A|b)$ אולי קרל עמודות $r_c(A)$.

הוכחה:

אם כן:

אם למערכת $Ax = b$ יש פתרון, לא אנדרגט שקיים $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \quad \text{כן -}$$

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \quad \text{נניח:}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

לפי כתיבת עמודות:

$$x_1 c_1 + \dots + x_n c_n = b$$

$$\Rightarrow b \in \text{Span}\{c_1, \dots, c_n\}$$

$$\Rightarrow b \in C(A)$$

2 ← 1

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} c_1 & \dots & c_n & b \\ \hline & & & 1 \end{array} \right)$$

$$r_c(A) = r_c(A|b) \quad \text{זרז ארמאן}$$

אמר ורר' $b \in C(A)$ שרובט ררר מררר

$$\text{Span}\{c_1, \dots, c_n\} = \text{Span}\{c_1, \dots, c_n, b\}$$

$$\Rightarrow r_c(A) = r_c(A|b)$$

2 ← 1

ררר רררר $Ax = b$ ירר רררר

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \quad \Leftrightarrow \text{לא קרר} \quad \text{רר} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \text{רר} \quad b \notin \text{Span}\{c_1, \dots, c_n\} \quad \text{ררר}$$

$$\dim \text{Span}\{c_1, \dots, c_n\} \neq \dim \text{Span}\{c_1, \dots, c_n, b\}$$

רררר ררר ררר

$$\overset{\text{רדוקציה}}{\Gamma_C(A)} = \overset{\text{רדוקציה}}{\Gamma_R(A)}$$

הערה: $A \in F^{m \times n}$ אכן

הוכחה:

$$B = \{b_1, \dots, b_k\} \quad k = \Gamma_C(A) \quad \text{אכן}$$

היא בסיס למרחב העמודות של A . $C(A)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_k \end{pmatrix}}_G d_i = C_i(A) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{העמודה} \\ \text{הראשונה} \\ \text{של } A \end{matrix} \quad \text{כיון:$$

קיים $d_i \in F^k$ כך שהיא מתקיימת.

$$G d_i = C_i(A) \quad \text{אכן} \quad C_i(A) \quad \text{קיים} \quad d_i \in F^k \quad \text{כך} \quad G d_i = C_i(A) \quad \text{אכן}$$

$$G(d_1, \dots, d_n) = (C_1(A), \dots, C_n(A)) \quad \text{המילים}$$

$$GD = A \quad \begin{matrix} m \times k & k \times n & m \times n \end{matrix} \quad \text{כיון:}$$

$$\Gamma_R(D) \leq k \Leftrightarrow \text{יש } k \text{ עמודות}$$

מכאן שורה שורה:

השורה של A קיים k שורות של D .

$$\Gamma_C(A) \leq k \quad \text{אכן}$$

$$\boxed{\Gamma_R(A) \leq \Gamma_C(A)} \quad \text{הסקנה:}$$

נניח A^t ונקרא:

$$\Gamma_C(A) = \Gamma_R(A^t) \leq \Gamma_C(A^t) = \Gamma_R(A)$$

$\Downarrow$

$$\Gamma_C(A) \leq \Gamma_R(A)$$

$$\boxed{\Gamma_C(A) = \Gamma_R(A)} \quad \text{אכן}$$

הלכה:

הדרגה של מטריצה $A \in F^{m \times n}$

$$\text{rank}(A) = r(A) = r_c(A) = r_r(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{פירוק}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{רצף מילוי} \\ \downarrow \end{array}$$

$$\text{rank}(A) = 2$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס מטריצה השורות:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\parallel$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס מטריצה העמודות:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

$\parallel$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

$\parallel$

(כ) שני וקטורים הבין מתוך $C(A)$

הערה:

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A), \text{rank}(B)$$

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(B) \quad \text{אם } A \text{ הפיכה}$$

א. לראות כי כל צורה צמודה:

הצורה של AB ק' ב B על צורה A , ולכן

$$r_c(AB) \leq r_c(A)$$

$$\Downarrow$$

$$r(AB) \leq r(A)$$

ב. לראות אכן, הצורה של AB ק' ב B על הצורה B , לכן

$$r_r(AB) \leq r_r(B)$$

$$\Downarrow$$

$$r(AB) \leq r(B)$$

$$r(AB) \leq r(B) \quad \text{א. לראות כי}$$

$$AB = C \quad \text{לדבר}$$

ידוע A^{-1} קיים ולכן קיימת A^{-1} הופכה

$$A^{-1}AB = A^{-1}C$$

$$\Downarrow$$

$$B = A^{-1}C$$

לראות כי:

$$r(A^{-1}C) \leq r(C)$$

$$r(B) \leq r(AB)$$

$\Downarrow$

כנגד.

$$\boxed{r(AB) = r(B)}$$

ולכן

משפט:

$$A \in F^{n \times n}$$

גודל

$$r(A) = n \iff A \text{ הפיכה}$$

הוכחה:

$$\iff \text{אם } A \text{ הפיכה אז קיים } A^{-1} \in F^{n \times n} \text{ כך } A^{-1}A = I - e$$

$$r(A^{-1}A) = r(I) = n$$

$$r(A^{-1}A) = r(A) \quad \text{לפי ההצדה הקודמת:}$$

$\downarrow$

$$r(A) = n$$

$$\Rightarrow \text{נמך } e - n = r(A) \quad \{1, 2, \dots, n\} \text{ הפיכה } A, \text{ כלומר } \exists \text{ הפיכה } A^{-1} \text{ כך } A^{-1}A = I - e$$

$$r_c(A) = n$$

לפי הטענה

$$C(A) \subseteq F^n$$

מרחב העמודות:

$\Downarrow$

$$C(A) = F^n \quad (\text{לפי משפט } \dim u = \dim v, u \leq v \iff u = v)$$

כעת, העמודות הן בסיס $1 \times n$. (לפי השליש גינה. יש לנו n עמודות הפורשות מרחב ממימד n ולכן הן בסיס).

$$\text{היות והעמודות הן בסיס } 1 \times n, \text{ לזאת אומרת שקיים } \vec{v}_i \in F^n \text{ כך } A\vec{v}_i = e_i, \text{ (כי למערכת זו יש פתרון כאשר } e_i \in C(A) \text{ ולא נכון).}$$

$$\text{באופן אחר קיים } v_i \in F^n \text{ כך } e_i = Av_i \text{ (לפי משפטן קודם)}$$

$$\left(\text{הסבר: המערכת } Av_i = e_i \text{ פתורה} \iff e_i \in C(A) \text{ והיא הוכחנו } e_i \in C(A) \text{ ונכון } e_i \in F^n \right)$$

$$B = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n) \quad \text{גודל:}$$

$$AB = (A\vec{v}_1 \dots A\vec{v}_n) = (e_1 \dots e_n) = I$$

$$\text{באופן אחר, לפי כלל שורה שורה קיים } C \in F^{n \times n} \text{ כך } CA = I - e$$

$$B = I B = (CA)B = C(AB) = CI = C \quad \text{אם } B = C$$

אכן A הפיכה.

של

משפט הקרויים

גדול $A \in F^{n \times n}$. אולי המושג קרויים:

- א. A הפיכה
- ב. אכן $"b \in F^n"$ למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.
- ג. קיים $"b \in F^n"$ כך שלמערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.
- ד. למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ פתרון טריוויאלי בלבד.
- ה. עמודות A גליל.
- ו. $\text{rank}(A) = n$.
- ז. שורות A גליל.

הוכחה:

א' $\Leftrightarrow$ ב':

אם A הפיכה אולי קיימת לה הופכה $A^{-1} \in F^{n \times n}$ כך $A^{-1}A = I$ -

$$Ax = b$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b \quad \text{פתרון יחיד.}$$

ב' $\Leftrightarrow$ ג':

כל $b \in F^n$.

כל מערכת כזו.

$$\{ \text{אוליגו פתרונות} \mid e \} + \{ \text{פתרונות פרטיים} \mid e \} = \{ \text{אוליגו פתרונות} \mid e \} - e \quad \text{יָקוֹב} \quad \text{?} \Leftarrow \text{?}$$

$$\Downarrow$$

$$\{ \text{אוליגו פתרונות} \mid Ax=0 \} + \{ Ay=b \} = \{ \text{אוליגו פתרונות} \mid Ax=b \}$$

$$\{ \vec{0} \} + \{ y \} = \{ \text{פתרון יחיד} \}$$

אומר, אם למערכת ההומוגנית היו אינסוף פתרונות אזי לא למערכת $Ax=b$ היו אינסוף פתרונות בסתירה לנתון.

? $\Leftarrow$?
למערכת ההומוגנית יש רק פתרון טריוויאלי, כלומר: $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$.

$$A = \begin{pmatrix} c'_1 & \dots & c'_n \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} c'_1 & \dots & c'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 c_1 + \dots + x_n c_n = 0$$

אם למערכת ההומוגנית יש רק פתרון טריוויאלי.

$$\Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$$

$\Leftrightarrow$ ולכן $c_1, \dots, c_n$ בגלל יחסי ההתאמה.

? $\Leftarrow$?
אם הצמודות של A בגלל, ואזי יש A -אין צמודות (ורכי הצמודות) מרשים את מרחב הצמודות (לכן הסים) $r_c(A) = n \Leftrightarrow$
 $\Downarrow$
 $r(A) = n$.

? $\Leftarrow$?
 $r_r(A) = r(A) = n$ לא אומר שמה מרחב הפוריות $= n$ וזהי' e n שורה
 $\Leftrightarrow$ לכן הטורים בגלל.

ז"ע 1.1:

אם A הוא מטריצה $n \times n$ מעל F אז $(R(A) \subseteq F^n)$.

אכן, אם $CA = I$ אז C היא מטריצה הפוכה של A .
אם A היא מטריצה הפוכה אז $CA = I$ וזהו זה.

משפט 1.1: אם A היא מטריצה $n \times n$ מעל F אז $\text{rank}(A) = n$ אם ורק אם A הפוכה.

הוכחה:

$A \in F^{n \times n}$

$$N(A) = \{x \in F^n \mid Ax = 0\}$$

$N(A)$ היא תת-מרחב וקטורי של F^n .

משפט 1.2:

$$\text{rank}(A) + \dim(N(A)) = n$$

העגות אינאריות

יח' $\mathbb{F}$ N V, W

$T: V \rightarrow W$ נקראת העגה (לכנסבורית) אינארית

כאן נקבעות התכונות:

$$T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, 1$$

$$T(\alpha \vec{v}) = \alpha T(\vec{v}) \quad \alpha \in \mathbb{F}, \vec{v} \in V, 2$$

דוגמה 1:

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a^2-b^2 \end{pmatrix} \quad T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, 1$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -27 \end{pmatrix}$$

$$3 T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \neq T\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$$

לכן זוהי לא העגה אינארית.

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a & a-b \\ b-a & 2b \end{pmatrix}$$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, 2$$

נראה שזוהי העגה אינארית:

$$V_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$T(V_1 + V_2) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(a_1 + a_2) & a_1 + a_2 - b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 - a_1 - a_2 & 2(b_1 + b_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1 - b_1 \\ b_1 - a_1 & 2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 & a_2 - b_2 \\ b_2 - a_2 & 2b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= T(V_1) + T(V_2)$$

$$T(\alpha V_1) = T\left(\begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha b_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\alpha a_1 & \alpha a_1 - \alpha b_1 \\ \alpha b_1 - \alpha a_1 & 2\alpha b_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2a_1 & a_1 - b_1 \\ b_1 - a_1 & 2b_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha T(V_1)$$

לכן זוהי העגה אינארית.

3. $A \in F^{m \times n}$

$L_A: F^n \rightarrow F^m$ לוקר

$L_A(v) = Av$ לוקר

לוקר העקרה ליניארי:

$$\begin{aligned} L_A(v_1 + v_2) &= A(v_1 + v_2) = \\ &= Av_1 + Av_2 = L_A(v_1) + L_A(v_2) \end{aligned}$$

$$L_A(\alpha v) = A(\alpha v) = \alpha Av = \alpha L_A(v)$$

הקריטריון המקורי:

$T: V \rightarrow W$ העקרה ליניארי אם

$$T(v_1 + \alpha v_2) = T(v_1) + \alpha T(v_2)$$

משפט:

אם T מקיימת את הקריטריונים.

הוכחה:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \iff \alpha = 1.1$$

$$T(\alpha v_2) = \alpha T(v_2) \iff v_1 = \vec{0}.2$$

משפט:

הוכחנו כי אם T העקרה ליניארי

$$T(0_v) = 0_w$$

הוכחה:

$$T(0_v) = T(0 \cdot 0_v) = 0 \cdot T(0_w) = 0_w$$

הוכחה:

מסקנה:

י"ו' $S, T: V \rightarrow W$ המפה ליניארית
אם S, T מתאפסות על קבוצה בורשה של V
יג' $S = T$

הוכחה:

ג'ה' $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ קבוצה בורשה של V

י"ו' $v \in V$

ב בורשה ולכן $\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n$ עבור $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$
 $\Downarrow$

$$T(v) = T(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) = \alpha_1 T(b_1) + \dots + \alpha_n T(b_n) = \\ = \alpha_1 S(b_1) + \dots + \alpha_n S(b_n) = S(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) =$$

↑
שקרי S ו- T מתאפסות
על קבוצה B , כלומר
 $T(b_i) = S(b_i)$ עבור $1 \leq i \leq n$

$$= S(v)$$

קיבלנו $T(v) = S(v)$ לכל $v \in V$ ולכן $T = S$

סיומ:

אוסף כל המפגרות ליניאריות $Hom(V, W) = T: V \rightarrow W$
↑
(V, W מ"ו מעל F)

Homomorphism

הצגות מולטיווא:

$$(T+S)(v) = T(v) + S(v)$$

$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$$

הצגת האפס:

$$0: V \rightarrow W$$

$$0(v) = \vec{0}_W$$

הצגת זהות:

הוכח $\text{Hom}(V, W)$ הוא מ"ו מעל F .

הוכחה:

יש להוכיח את תכונות הסגור על פני ההצגות המולטיווא. הנה, לא נחשב שקיבלנו סכום וקטוריים ב- W , אכן $(S+T): V \rightarrow W$ ואם $(\alpha T): V \rightarrow W$.

אסוציאטיביות ואינאריות: $S(v), T(v) \in W$ אכן גבולות שלהן הן בירושלם W .

איבר האפס: ההצגת האפס. $(0+T)(v) = 0(v) + T(v) = 0 + T(v) = T(v)$.
כפל זהות: $1 \cdot T(v) = T(v)$ מתקיים

נחשב $T(v) \in W$ ו- 1 הוא מ"ו.

גדלי אינאריות: בלתי קיום גדלי אינאריות במ"ו W .

דיסטריביוטיביות: ירושלה $N-V$ ו- W .

נוסף על כך צריך להוכיח את $(T+S)$ ואם (αT) ההצגות אינאריות:

$$\begin{aligned}(T+S)(v_1 + \alpha v_2) &= T(v_1 + \alpha v_2) + S(v_1 + \alpha v_2) = T(v_1) + S(v_1) + \alpha T(v_2) + \alpha S(v_2) \\ &= (T+S)(v_1) + \alpha (T+S)(v_2)\end{aligned}$$

אכן $S+T$ ההצגת אינאריות.

$$(\alpha T)(v_1 + \beta v_2) = \alpha (T(v_1) + \beta T(v_2)) = (\alpha T)(v_1) + \beta (\alpha T)(v_2)$$

אכן αT ההצגת אינאריות.

הצגה:

$$I \in \text{Hom}(V, V)$$

הצגה של I:

$$I(\vec{v}) = \vec{v}$$

מק"מ לכל $\vec{v} \in V$

הצגה:

הרכבת הצגות אינארדיות:

$$T: V \rightarrow W$$

$$S: W \rightarrow U$$

כאשר U, W, V מרחבי וקטורים מעל F .

$$S \circ T(\vec{v}) = S(T(\vec{v})) \quad \vec{v} \in V$$

מק"מ לכל $\vec{v} \in V$

אנליזה / שינוי סדר

תלכודת:

V, W מ"ו מע"פ.

$T: V \rightarrow W$ העברה אינארית אם:

$$\alpha \in \mathbb{F}, v_1, v_2 \in V$$

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$T(\alpha v_1) = \alpha T(v_1)$$

העברה הליחית:

$$I: V \rightarrow V$$

$$I(v) = v$$

הרכבת העברות:

$$T: V \rightarrow W, S: W \rightarrow U$$

$$S \circ T(v) = S(T(v))$$

הרדוקציה: ה"ו שבהרכבת העברות אינאריות היא העברה אינארית.

השקפה: יהי V, W מ"ו מע"פ.

העברה אינארית $T: V \rightarrow W$ ה"ו הפיכה אם קיי"ח

$$S: W \rightarrow V \text{ כך ש:}$$

$$T \circ S = I_W$$

$$S \circ T = I_V$$

$$S = T^{-1} \text{ ואז נסמן}$$

משפט:

אם $T: V \rightarrow W$ הצגה ליניאר הפיכה אזי גם T^{-1} היא הצגה ליניאר הפיכה ומקיים $(T^{-1})^{-1} = T$

הוכחה:

נראה T^{-1} היא הצגה ליניאר:

$T^{-1}: W \rightarrow V$ 1.3

$$\underbrace{T^{-1}(w_1 + \alpha w_2)}_{V_1} = \underbrace{T^{-1}(w_1) + \alpha T^{-1}(w_2)}_{V_2} \quad \text{מק"מ}$$

$$V_1 = V_2 \quad \text{1.3}$$

$$T^{-1}(w_1 + \alpha w_2) = v_1 \quad \text{נניח ש } v_1 \in V$$

$$(T \circ T^{-1})(w_1 + \alpha w_2) = T(v_1) \quad \text{נפעיל } T \text{ על האגפים:}$$

$$I_w(w_1 + \alpha w_2) = T(v_1)$$

$$w_1 + \alpha w_2 = T(v_1)$$

$$T^{-1}(w_1) + \alpha T^{-1}(w_2) = v_2 \quad \text{2. נ'}$$

$$T(T^{-1}(w_1) + \alpha T^{-1}(w_2)) = T(v_2) \quad \text{נפעיל } T \text{ על האגפים:}$$

$$T \circ T^{-1}(w_1) + \alpha T \circ T^{-1}(w_2) = T(v_2) \quad \text{אם } T \text{ הצגה ליניאר ולכן:}$$

$$I_w(w_1) + \alpha I_w(w_2) = T(v_2)$$

$$w_1 + \alpha w_2 = T(v_2)$$

$$T^{-1}(w_1 + \alpha w_2) = T^{-1} \circ T(v_2)$$

$$\text{נפעיל } T^{-1}$$

$$T^{-1}(w_1 + \alpha w_2) = I_V(v_2)$$

$$\underbrace{T^{-1}(w_1 + \alpha w_2)}_{V_1} = v_2$$

$\Downarrow$

$$V_1 = v_2 \quad \text{לכן}$$

הוכחה / המשך:

3.1: T^{-1} הפיכה.

יקוד T - העתקה איזומורפית הפיכה.

$$T \circ T^{-1} = I \quad T^{-1} \text{ מק"מ}$$

$$T^{-1} \circ T = I$$

ולכן גם T^{-1} הפיכה ומק"מ $(T^{-1})^{-1} = T$.

הגדרות:

איזומורפיזם - העתקה איזומורפית.

איזומורפיזם - העתקה איזומורפית ג'נרל.

הערה:

אם ק"מ $T: V \rightarrow W$ איזומורפיזם, נסמן $V \cong W$.
נאמר $V \cong W$ - איזומורפיזם $T: V \rightarrow W$ או הפוך, או $V \cong W$ הם איזומורפיזם.

הערה $\cong$ הוא יחס שקילות:

רפלקסיביות: $V \cong V$ כי $I: V \rightarrow V$ איזומורפיזם.

סימטריות: $V \cong W$ דבר $W \cong V$ כי $T: V \rightarrow W$ ג'נרל וזו

דבר $T^{-1}: W \rightarrow V$ איזומורפיזם.

טרנזיטיביות: $V \cong W \Leftarrow T: V \rightarrow W$ איזומורפיזם.

$W \cong U \Leftarrow S: W \rightarrow U$ איזומורפיזם.

$\Downarrow$

ולכן: $S \circ T: V \rightarrow U$ איזומורפיזם.

$$V \cong U$$

leben

$V \cong \mathbb{F}^n$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}$ $\mathbb{F}^N$ n $\mathbb{F}^N \times \mathbb{F}^N$ $\hat{N}$ V 'ד'

12/12

$$\{b_1, \dots, b_n\} \quad \text{: } v \in \text{ord } B \text{ "n"}$$

כל $v \in V$ וכל $e \in E$

$$V = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

∴ '3' is $T: V \rightarrow IF^n$

2017

$$T(v) = [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

ד. ה"ל מולדת ה"ל ל"ל מ'קול דהצלה ל"ל הסס.

$$T(V_1 + \alpha V_2) = [V_1 + \alpha V_2]_B = [V_1]_B + \alpha [V_2]_B = T(V_1) + \alpha T(V_2)$$

וולן T חזקה אינטימי,

∴ 'A' $S: F^n \rightarrow V$

שלמה דוד הופכי :

$$S \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

$$T \circ S \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow T \circ S = I_{\mathbb{F}^n} \quad \text{ie. invertible}$$

$$S \circ T(V) = V \Rightarrow S \circ T = I_V$$

ד קריינע מען רייניגט וואס איר זענט.

$V \cong \mathbb{F}^n$ $\Downarrow$ $\rho(A)$ $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ T, S

משפט 1:

היה $T: V \rightarrow W$ העתקה אינארית, ונגיד $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$.
 אז $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בג' $\{v_1, \dots, v_n\}$ בג'.

הוכחה:

נניח בשלילה $\{v_1, \dots, v_n\}$ בג'.

לפי אומרת שקיים צירוף אינארי לא טריוויאלי:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0}$$

$$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = T(\vec{0})$$

נציג T :

$$\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) = \vec{0}$$

T העתקה אינארית ולכן:

$\leftarrow$ קיבלנו שקיים צירוף אינארי לא טריוויאלי בסתירה לכך $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בג'.

משפט ההאזרה של העתקה אינארית:

יהיו V, W מ'ו מ'ו שזה F .

יהי $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ בסיס V .

יהיו $w_1, \dots, w_n \in W$ וקטורים כלשהם, אזי קיימת העתקה אינארית

$$T(b_1) = w_1$$

$$T: V \rightarrow W$$

המק"מ:

מ'י

$$T(b_n) = w_n$$

הוכחה:

נגדיר $T: V \rightarrow W$ בצורה הבאה:

יהי $v \in V$.

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ קבועים וכן B

$$v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \quad \text{כך ש-}$$

$$T(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n \quad \text{נגדיר}$$

נראה ש- T היא תצורה ליניארית:

$$T(v_1 + \beta v_2) = T(v_1) + \beta T(v_2) \quad \text{נראה, ב.נ.}$$

$v_1, v_2 \in V$, וכן לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ נגדיר $v_1, v_2 \in B$:

$$v_1 = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_n b_n$$

$$v_2 = \delta_1 b_1 + \dots + \delta_n b_n$$

$\Downarrow$

$$v_1 + \beta v_2 = (\gamma_1 + \beta \delta_1) b_1 + \dots + (\gamma_n + \beta \delta_n) b_n$$

לפי הגדרת T :

$$\begin{aligned} T(v_1 + \beta v_2) &= (\gamma_1 + \beta \delta_1) w_1 + \dots + (\gamma_n + \beta \delta_n) w_n = \\ &= \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n + \beta (\delta_1 w_1 + \dots + \delta_n w_n) = \\ &= T(v_1) + \beta T(v_2) \end{aligned}$$

הוכחה נוספת:

נגדיר $S: V \rightarrow W$ המקבילית $S(v_1) = w_1$

$\vdots$

$$S(v_n) = w_n$$

לפי מבט נוסף נראה, אם S תצורה ליניארית אז $T = S$.

$\Downarrow$

S, T תצורות S ו- T הן תצורות B וכן שווה.

כלומר התצורה T היא ליניארית.

קואליטאציה:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

התמונה של קואליטאציה

כך ע

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

בריון:

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס. לכן, לכל נקודה (x, y) במישור, קיימת הצגה יחידה

כזו, $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ נמצאת במישור.

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \end{array} \right) \xrightarrow{\text{קירוב}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x+y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{x-y}{2} \end{array} \right)$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{x+y}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{x-y}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \left(\frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) =$$

נכנס:

$$= \frac{x+y}{2} T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5x-3y}{2} \\ \frac{7x-3y}{2} \\ \frac{9x-3y}{2} \end{pmatrix}$$

הגדרה:

הגרעין של התransformation T הוא $\ker T$

$$\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

התמונה של התransformation T :

$$\operatorname{Im} T = \{T(v) \in W \mid v \in V\}$$

דוגמה:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x+2y+2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \ker T &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{matrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T &= \left\{ (x+y+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

הגדרה:

$$\operatorname{Im} T = W \quad \text{אם ורק אם} \quad T: V \rightarrow W$$

התransformation

הוכחה:

$V \in \ker T$ וכן $w \in \ker T$

$V, w \in \ker T$

הוכחה:

$$V_1 - V_2 \in \ker T \Leftrightarrow T(V_1) = T(V_2)$$

הוכחה:

$$T(V_1) = T(V_2)$$

$$\Leftrightarrow T(V_1) - T(V_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow T(V_1 - V_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow V_1 - V_2 \in \ker T$$

הוכחה:

$$\ker T = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow T \text{ חד-חד-ערכי}$$

הוכחה:

$$\vec{0} \in \ker T \text{ וכן } T \text{ חד-חד-ערכי} \Leftrightarrow$$

$$T(V) = \vec{0} \Leftrightarrow V \in \ker T$$

$$T(V) = T(\vec{0}) \quad \text{חד-חד-ערכי}$$

$$V = \vec{0}$$

$\Downarrow$

$$\ker T = \{\vec{0}\}$$

$$\ker T = \{\vec{0}\} \Rightarrow$$

$$T(V_1) = T(V_2) \Leftrightarrow V_1 - V_2 \in \ker T$$

$$V_1 - V_2 \in \ker T$$

$$V_1 - V_2 = 0$$

$\Downarrow$

$$V_1 = V_2$$

$$T \text{ חד-חד-ערכי}$$

$$\text{rank } T = \dim \text{Im } T$$

מדרג

$$\text{nullity } T = \dim \ker T = \nu(T)$$

למשל

$$\text{העברה } T: V \rightarrow W \quad \text{אם}$$

$$\text{rank } T + \dim \ker T = \dim V$$

הצגה ליניארית / שינוי 11

הצגה:

$T: V \rightarrow W$ הצגה ליניארית

$\forall v \in V, w \in W$

$\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$ הגרעין של הצגה ליניארית T .

$\operatorname{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$

הצגה ליניארית היא אפ $\operatorname{Im}(T) = W$

משפט: $\ker(T) = \{0\} \iff T$ אנ

$\operatorname{rank}(T) = \dim \operatorname{Im}(T)$

סיומ:

$\operatorname{nulity}(T) = \dim \ker(T) = \nu(T)$

משפט הצגה

משפט: $T: V \rightarrow W$ הצגה ליניארית, אז

$$\dim \ker(T) + \operatorname{rank}(T) = \dim V$$

הוכחה:

יהיו $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ בסיס ל־ $\ker T$,
ונגד $\{T(u_1), \dots, T(u_r)\}$ הם בסיס ל־ $\operatorname{Im}(T)$
כך $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_r \in V$

לדבר:

$\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_r\}$ הם בסיס.

הוכחה:

נניח שקיים צירוף $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r = 0$
נפעיל עליו את ההיפוקרנים:

$$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_r u_r) = T(0)$$
$$\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_k T(v_k) + \beta_1 T(u_1) + \dots + \beta_r T(u_r) = 0$$

החלק הראשון הוא 0 שכן $v_i \in \ker T$

אז $\beta_1 T(u_1) + \dots + \beta_r T(u_r) = 0$

$\Downarrow$

$$\beta_1 T(u_1) + \dots + \beta_r T(u_r) = 0$$

אבל $\{T(u_1), \dots, T(u_r)\}$ הם בסיס ופרט בסיס ולכן $\beta_1 = \dots = \beta_r = 0$
נניח שגם $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ ונקבל:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

אבל $\{v_1, \dots, v_k\}$ הם בסיס ופרט בסיס ולכן $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

$\Downarrow$

בסך הכל $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$ ולכן הקבוצה $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_r\}$ היא בסיס.

הוכחה / תהנה:

טענה: הקבוצה $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s\}$ בורסה ב- V .

הוכחה:

נניח $v \in V$ נרש על ידי הסים הלא-מודים.

אכן קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in F$ כך ש:

$$T(v) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_s T(u_s)$$

T הצגה קו-ליניארית ולכן:

$$T(v) = T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s)$$

$$T(v) - T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s) = 0$$

$$T(\underbrace{v - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_s u_s}) = 0$$

$\in \ker(T)$

ולכן הביטוי הנ"ל נרש על ידי $\{v_1, \dots, v_k\}$ כולומה:

קיימים $\beta_1, \dots, \beta_k \in F$ כך ש:

$$v - \alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_s u_s = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k$$

$\Downarrow$

$$v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_s u_s$$

קיבלנו:

ולכן הקבוצה $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s\}$ בורסה ב- V .

הסך הכול: הקבוצה $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_s\}$ בסיס ופירושה של V ולכן הסים V -ל.

$$\dim V = \dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T)$$

ולכן:

נסקנו בעל הדגה

יהי V, W מ"מ ממד סופי על F

1- $T: V \rightarrow W$ הדגה ליניארית.

1, $\dim V < \dim W$ אזי T אינה על.

הוכחה:

$$\dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V \quad \text{על בעל הדגה}$$

$$\dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) < \dim W$$

$$\dim \operatorname{Im}(T) < \dim W \quad \Leftarrow$$

$$\operatorname{Im}(T) \subsetneq W \quad \Leftarrow$$

$$T \text{ אינה על (לא ממלאת את } W) \quad \Leftarrow$$

2, $\dim W < \dim V$ אזי T אינה רגל

הוכחה:

$$\dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = \dim V \quad \text{על בעל הדגה}$$

$$\dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) > \dim W$$

$$\dim W - \dim \operatorname{Im}(T) < 0 \quad \text{אבל} \quad \dim \operatorname{Im}(T) \leq \dim W$$

$$\dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T) > \dim W \quad \text{זו נגד}$$

$$\dim \ker(T) > \dim W - \dim \operatorname{Im}(T)$$

$$\dim \ker(T) > 0$$



T אינה רגל.

3, $\dim V = \dim W$, אזי T רגל $\Leftrightarrow T$ על.

הוכחה:

$$\dim \operatorname{Im}(T) + \dim \ker(T) = \dim V \quad \text{על בעל הדגה} \quad \Leftrightarrow \quad \dim \ker(T) = 0 \Leftrightarrow \ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow T \text{ רגל}$$

$$T \text{ על} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(T) = W \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(T) = \dim W$$

הוכחה/המשך:

$\Rightarrow$ ולכן T צ'.

לכן T גם הצ' צ' כי מסקנת קודמת ומכאן שגיו אינזומורפיזם

בין V ו- W .

$$\Downarrow \\ V \cong W$$

משפט - יום של העסקת אינזומורפיזם:

יהי $T: F^{n \times n} \rightarrow F^{n \times n}$ הפיכה ממשל A הפיכה.

הוכחה:

נציג $T: F^{n \times n} \rightarrow F^{n \times n}$ צ' י' $T(x) = Ax$ (צדד A גומה)

לזה העסקת אינזומורפיזם (לפי גבולות כפי מלביצות).

נראה שהעסקת אינזומורפיזם זו היא אינזומורפיזם.

נראה שהיא הצ':

נניח $B, C \in F^{n \times n}$ מקיימים $T(B) = T(C)$

$$AB = AC$$

סוף ידוע $e - A$ הפיכה ממשל, ולכן קיימת $M \in F^{n \times n}$ כך $MA = I - e$.

$\Downarrow$

$$M(AB) = M(AC)$$

$$(MA)B = (MA)C$$

$$B = C$$

לפי מסקנת 3 ד היא צ', T הצ' וצ' ולכן אינזומורפיזם.

בפרט, קיימת $Q \in F^{n \times n}$ אידה כך $T(Q) = I - e$.

$$AQ = I$$

לכן מכאן $e - A$ הפיכה למ' מ' M . לפי הוכחה קודמת $Q = M$.

ולכן A הפיכה.

1011 מ"ע

הר"י $A \in F^{m \times n}$ כך $\text{rank } A = r - e$, אולי:

א. אם $r < n$ אולי למצוא המרחב r יוגר מרחבן אחד.

ב. אם $r = n$ אולי למצוא המרחב r יוגר מרחבן r יוגר מרחבן.

הוכחה:

נגדיר $T_A: F^n \rightarrow F^m$ על ידי $T(x) = Ax$.

המרחב $\text{Im } T$

נציג את הבסיס הסטנדרטי של F^n $\{e_1, \dots, e_n\}$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \text{Span}\{T(e_1), \dots, T(e_n)\} = \\ &= \text{Span}\{Ae_1, \dots, Ae_n\} = \\ &= \text{Span}\{C_1(A), \dots, C_n(A)\} \end{aligned}$$

ידיד $\text{rank}(A) = r - e$, r הוא r המרחב r יוגר מרחבן.

נניח בלי הדבר כלומר שאלו r המרחב r יוגר מרחבן.

לכן בסיס המרחב $\{C_1(A), \dots, C_r(A)\}$ הוא

$$\dim \text{Im}(T) = r$$

לפי משפט הקדמה: $\dim \ker(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim F^n$

$$\dim \ker(T) + r = n$$

$$\dim \ker(T) = n - r$$

אולי $\ker(T) = \{x \in F^n \mid Ax = 0\}$ אולי $r = n$:

כלומר זהו מרחב r יוגר מרחבן r יוגר מרחבן.

מרחב $\ker(T)$

א. אם $r < n$ $\dim \ker(T) > 0$ יוגר מרחבן אחד (מרחב r יוגר מרחבן).

אוינסופי = אינסוף r יוגר מרחבן.

ב. אם $r = n$ $\dim \ker(T) = 0$ אולי $\ker(T) = \{0\}$ כלומר r יוגר מרחבן.

המרחב r יוגר מרחבן r יוגר מרחבן.

דוגמה נוספת:

$$V = \mathbb{R}[x]$$

$$T(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$$

$$S(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = C + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

$$T \circ S(p) = p$$

$$S \circ T(p) \neq p$$

לכן המרחבים אינסופיים הם מקיימים $T \circ S = I$ ולא בהכרח מקיימים $S \circ T = I$.

תוצאה: הוכח שישויון $T: V \rightarrow W$ ו- $S: W \rightarrow V$ אם ורק אם

התנאי: $T: V \rightarrow W$ ו- $S: W \rightarrow V$ אם ורק אם

$$\dim V \geq \dim W \iff$$

$$\dim W \geq \dim V \iff \text{יש } S: W \rightarrow V \text{ המקיימת } T \circ S = I$$

הסבר:

$\Downarrow$
לכן ישויון $T: V \rightarrow W$ אם ורק אם

מטריצה מייצגת של תמורה אינארית

נתון תמורה $T: V \rightarrow W$ אינארית.
 אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ב- V ו- $\{w_1, \dots, w_m\}$ בסיס ב- W .

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_F & \dots & [T(v_n)]_F \end{pmatrix}$$

$$E = \{v_1, \dots, v_n\} \quad : v \in \text{בסיס } E$$

$$F = \{w_1, \dots, w_m\} \quad : w \in \text{בסיס } F$$

דוגמה:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ y - z \end{pmatrix}$$

בסיס E:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)]_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)]_F = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)]_F = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה המייצגת של T היא:

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

הכנסת תמונת התמורה

$$[T]_F^E \cdot [v]_E = [T(v)]_F \quad \text{כל } v \in V$$

הוכחה:

$v \in V$ נבחר v בצורה ליניארית על וקטורי E .

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow [v]_E = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} [T]_F^E [v]_E &= \left([T(v_1)]_F \quad \dots \quad [T(v_n)]_F \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \\ &= \alpha_1 [T(v_1)]_F + \dots + \alpha_n [T(v_n)]_F = \\ &= [T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)]_F = [T(v)]_F \end{aligned}$$

$$[T(\alpha v + \beta u)]_F = \alpha [T(v)]_F + \beta [T(u)]_F \quad .$$

$$\begin{aligned} [T(\alpha v + \beta u)]_F &= [\alpha T(v) + \beta T(u)]_F = \\ &= \alpha [T(v)]_F + \beta [T(u)]_F \end{aligned} \quad \text{הוכחה}$$

$$[0]_F^E = 0 \quad .$$

$$\begin{aligned} [0]_F^E &= \left([0(v_1)]_F \quad \dots \quad [0(v_n)]_F \right) = \\ &= \left([0]_F \quad \dots \quad [0]_F \right) = 0 \end{aligned} \quad \text{הוכחה}$$

? האם התמונה של I_V היא I_V ?

$$[I_V]_F^E [v]_E = [v]_F$$

$$[I_V]_F^E [v]_E = [I_V(v)]_F = [v]_F \quad \text{הוכחה}$$

↑
כל v

הכרזה: $T: V \rightarrow V$ אר ג'ס'ס B ב' V (לס' א'נקור ולס' א'ג'מ'ס'ס)
 $[T]_B$ א'ל' א'ס'ס'ק א'ס'ס'ן

$$[I_V]_B [V]_B = [V]_B \quad \text{ג'ר'ס'ל א'ג'ק'ס'ס':}$$

$$[I]_B = I \quad \text{א'ל' א'ס'ס'ן א'ג'ס'ס':}$$

$$(A = B \quad \text{א'ל' } x \quad \text{א'ס'ס'ן } A x = B x \quad \text{א'ל'})$$

א'ס'ס'ן: 1, א'ס'ס'ן: $T, S: V \rightarrow W$, $\alpha, \beta \in F$, $\alpha T + \beta S$ א'ל' W

$$[\alpha T + \beta S]_F^E = \alpha [T]_F^E + \beta [S]_F^E$$

2, א'ס'ס'ן: $S: W_F \rightarrow U_G$, $T: V_E \rightarrow W_F$

$$[S]_G^F \cdot [T]_F^E = [S \circ T]_G^E$$

3, $f(x) \in F[x]$, $T: V_E \rightarrow V_E$

$$[f(T)]_E = f([T]_E)$$

$$[\alpha T + \beta S]_F^E = \left([(\alpha T + \beta S)(v_1)]_F \quad \dots \quad [(\alpha T + \beta S)(v_n)]_F \right) =$$

$$= \left(\alpha [T(v_1)]_F + \beta [S(v_1)]_F \quad \dots \quad \alpha [T(v_n)]_F + \beta [S(v_n)]_F \right) =$$

$$= \alpha \left([T(v_1)]_F \quad \dots \quad [T(v_n)]_F \right) + \beta \left([S(v_1)]_F \quad \dots \quad [S(v_n)]_F \right)$$

$$= \alpha [T]_F^E + \beta [S]_F^E$$

הוכחה/הערה:

$$[S \circ T]_G^E [v]_E = [S \circ T(v)]_G = [S(T(v))]_G = 2. \\ = [S]_G^F [T(v)]_F = [S]_G^F [T]_F^E [v]_E$$

$A=B$ כל x כך $Ax = Bx$ וזה נכון לכל x לכן $[S \circ T]_G^E = [S]_G^F [T]_F^E$

$$T: V \rightarrow V, f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \text{ נוסף } f(x) \in \mathbb{F}[x] \quad 3.$$

$$[f(T)]_E^E = \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i \right]_E^E = \sum_{i=0}^{\infty} a_i [T^i]_E^E = \sum_{i=0}^{\infty} a_i [T]_E^E{}^i = f([T]_E^E)$$

הוכחה:

$$T: V \rightarrow W \\ \begin{matrix} E & F \\ \text{בסיס} & \text{בסיס} \end{matrix}$$

$$([T]_F^E)^{-1} = [T^{-1}]_E^F \text{ הריבוי } [T]_F^E \Leftrightarrow T \text{ הריבוי}$$

הוכחה:

$$T \circ T^{-1} = I_W \text{ כן } T^{-1}: W \rightarrow V \text{ הריבוי } \Leftrightarrow T \text{ הריבוי} \\ T^{-1} \circ T = I_V$$

$$[T \circ T^{-1}]_F = [I_W]_F \Leftrightarrow T \circ T^{-1} = I_W$$

$$[T]_F^E [T^{-1}]_E^F = I \text{ וזה סגור 2 ב-N}$$

$$[T^{-1} \circ T]_F = [I_V]_F \Leftrightarrow T^{-1} \circ T = I_V$$

$$[T^{-1}]_E^F \cdot [T]_F^E = I \text{ וזה סגור 2 ב-N}$$

$$([T]_F^E)^{-1} = [T^{-1}]_E^F \text{ הריבוי } [T]_F^E \Leftrightarrow$$

משפט:

יהיו V, W מרחבי סופיים $\dim V = m, \dim W = n$. F שדה.
 E בסיס V , F בסיס W .

אולי ההצגה:

$$\psi: \text{Hom}(V, W) \rightarrow F^{n \times m}$$

$$\psi(T) = [T]_F^E$$

המקדמת של T היא איזומורפיזם.

המשפט: הוכחו את המשפט.

$$\dim \text{Hom}(V, W) = (\dim V) \cdot (\dim W)$$

סקרה:

למה:

יהיו V מרחב סופי B_1, B_2 בסיסים של V .

$$P = [I]_{B_2}^{B_1} \quad \text{אולי} \quad P[V]_{B_1} = [V]_{B_2}$$

ההפרדה המקבילה P

$$[I]_{B_2}^{B_1} [V]_{B_1} = [V]_{B_2} \quad \text{אולי} \quad [I]_{B_2}^{B_1}$$

הוכחה: ידוע שזהו

$$P = [I]_{B_2}^{B_1}$$

אכן זהו משפט

$$[T]_{F_2}^{E_1} = [I]_{F_2}^{F_1} [T]_{F_1}^{E_1} [I]_{E_1}^{E_2}$$

אולי: $T: V \rightarrow W$
 E_1, E_2 בסיסים F_1, F_2 בסיסים

הוכחה:

$$[I]_{F_2}^{F_1} [T]_{F_1}^{E_1} [I]_{E_1}^{E_2} [V]_{E_2} =$$

$$= [I]_{F_2}^{F_1} [T]_{F_1}^{E_1} [V]_{E_1} = [I]_{F_2}^{F_1} [T(V)]_{F_1} =$$

$$= [T(V)]_{F_2} = [T]_{F_2}^{E_2} [V]_{E_2}$$

$$[T]_{F_2}^{E_2} = [I]_{F_2}^{F_1} [T]_{F_1}^{E_1} [I]_{E_1}^{E_2}$$

אולי זהו משפט או ק"מ



הוכחה בעזרת 75

$$\psi: \text{Hom}(V, W) \rightarrow \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$\psi(T) = [T]_F^E$$

נוכח: ψ - e

1.3 $T=S$, $\psi(T) = \psi(S)$ - e

$$\psi(T) = \psi(S)$$

$$[T]_F^E = [S]_F^E$$

1.4 $E = \{v_1, \dots, v_m\}$ בסיס V

$\Downarrow$

על המרחב V , ולכן C_i מוגדרת על המרחב V .

$$C_i([T]_F^E) = C_i([S]_F^E) \quad \text{על } V$$

$$[T(v_i)]_F = [S(v_i)]_F \quad \text{על } V$$

$$T(v_i) = S(v_i) \quad \text{על } V$$

$$T=S \quad \text{על } V$$

$\Downarrow$

$$T=S$$

נוכח: ψ - e

1.3 $\exists T \in \text{Hom}(V, W) : \psi(T) = A$, $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$

$$A = (C_1(A) \dots C_n(A))$$

$$A = ([w_1]_F \dots [w_n]_F) \quad \text{על } V$$

$$T(v_i) = w_i \quad \text{על } V$$

$$T(v_i) = w_i \quad \text{על } V$$

אכן ψ - e

$$[T]_F^E = ([T(v_1)]_F \dots [T(v_n)]_F) = ([w_1]_F \dots [w_n]_F) =$$

$$= (C_1(A) \cdot \dots \cdot C_n(A)) = A$$

$$\exists T \in \text{Hom}(V, W) : \psi(T) = A$$

ל- T היא ψ .



בסך הכל T גלגל ושל ψ וכן אילומורפיזם.

הערה: צריך להבחין בין ψ וכן ψ לא קר אומורפיזם.

משפט - דרגה של מטריצה מייצגת

תהי $T: V \rightarrow W$ הע"ל. אזי $rank(T) = rank([T]_F^B)$ לכל בסיס B של V ובסיס F של W .

הוכחה

נניח ש $\{v_1, \dots, v_k\}$ הם בסיס ל $\ker T$.
 וכן $\{T(u_1), \dots, T(u_l)\}$ הם בסיס ל $\text{Im } T$.
 הוכחנו (בהוכחת משפט הדרגה) ש $B = \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l\}$ הם בסיס ל V .
 יהי F בסיס כלשהו של W .

$$[T]_F^B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(v_1)]_F & \dots & [T(v_k)]_F & , & [T(u_1)]_F & \dots & [T(u_l)]_F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

כעת, ידוע לנו הרי ש $\{v_1, \dots, v_k\} \in \ker T$, כלומר $T(v_1) = \dots = T(v_k) = \vec{0}$ ולכן גם

$$[T(v_1)]_F = \dots = [T(v_k)]_F = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

בנוסף, ידוע $\{T(u_1), \dots, T(u_l)\}$ הם בסיס ל $\text{Im } T$, בפרט בת"ל, לכן נקבל:

$$[T]_F^B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [T(v_1)]_F & \dots & [T(v_k)]_F & , & [T(u_1)]_F & \dots & [T(u_l)]_F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underbrace{0 \dots 0}_{k \text{ columns of zero!!!}} & , & \underbrace{[T(u_1)]_F \dots [T(u_l)]_F}_{\text{linearly independent}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

לכן נקבל $rank[T]_F^B = l$

יהיו B_2, F_2 בסיסים נוספים של W ו V בהתאמה.

כמו שהוכחנו בשיעור שעבר: $[T]_{F_2}^{B_2} = [I]_{F_2}^F [T]_F^B [I]_B^{B_2}$.

לפי משפט שהוכחנו בעבר, אם A הפיכה אזי $r(AB) = r(B)$.
 (הערה: נראה ש $r(BA) = r(B)$ כאשר A הפיכה)

לכן, $r([T]_{F_2}^{B_2}) = r([I]_{F_2}^F [T]_F^B [I]_B^{B_2})$ שהרי $[I]_B^{B_2}$ היא הפיכה.

באותו אופן: $r([T]_{F_2}^{B_2}) = r([I]_{F_2}^F [T]_F^B [I]_B^{B_2}) = r([T]_F^B [I]_B^{B_2})$ שהרי $[I]_{F_2}^F$ היא הפיכה.

בסה"כ קיבלנו ש $r([T]_{F_2}^{B_2}) = r([I]_{F_2}^F [T]_F^B [I]_B^{B_2})$

אבל הרי $[T]_{F_2}^{B_2} = [I]_{F_2}^F [T]_F^B [I]_B^{B_2}$ ולכן $r([T]_{F_2}^{B_2}) = r([T]_F^B)$

$A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נקראו פולינום $p \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה

$$p^{-1} A p = B$$

עבור $T: V \rightarrow V$ כאשר B, C בסיסים $v \in V$ נראה $[T]_C^B = ([I]_B^C)^{-1} [T]_C^C [I]_C^B$

לכן $[T]_C^B = [I]_B^C^{-1} [T]_C^C [I]_C^B$ נקראו פולינום

אנליזה / שיטות 12

הקדמה: $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ הוא פונקציה חד-חד-ערכית ושל-חד-ערכית. $|S_n| = n!$ ומתקיים S_n נקרא $\{1, \dots, n\}$ המסומן על ידי σ .

דוגמה 1: $\{1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$ ק"מ"מ של המסומן:

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \tau: \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 2 \end{array} \quad \tau(1)=1 \quad \tau(2)=2 \\ \tau: \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 1 \end{array} \quad \tau(1)=2 \quad \tau(2)=1 \end{array}$$

הצגה על שורות:

$$\begin{array}{l} i \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad i \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \tau(i) \end{array}$$

הצגה לפי מחזוריות:

$$(i, \tau(i), \tau(\tau(i)), \dots)$$

$$\begin{array}{l} \tau \quad (1) (2) \quad \tau(12) \quad ((21)) \quad \text{(כאן)} \\ \tau_1: \begin{array}{l} \tau_1(1)=1 \\ \tau_1(2)=2 \\ \tau_1(3)=3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (1)(2)(3) \quad S_3 \\ \tau_2: \begin{array}{l} \tau_2(1)=2 \\ \tau_2(2)=1 \\ \tau_2(3)=3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (12)(3) \\ \tau_3: \begin{array}{l} \tau_3(1)=1 \\ \tau_3(2)=3 \\ \tau_3(3)=2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)(23) \\ \tau_4: \begin{array}{l} \tau_4(1)=3 \\ \tau_4(2)=2 \\ \tau_4(3)=1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (13)(2) \\ \tau_5: \begin{array}{l} \tau_5(1)=2 \\ \tau_5(2)=3 \\ \tau_5(3)=1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (123) \\ \tau_6: \begin{array}{l} \tau_6(1)=3 \\ \tau_6(2)=1 \\ \tau_6(3)=2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (132) \end{array}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 8 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

קולנו:

$\Downarrow$

$$(1\ 4\ 3)(2\ 6)(5\ 8)(7)$$

הרכבה של גמורות

אם $\sigma, \tau \in S_n$ הרכבה מקימה $\tau \circ \sigma(i) = \tau(\sigma(i))$

$$\tau = (1\ 3\ 4\ 5)(2)$$

קולנו:

$$\sigma = (2\ 1\ 5)(3\ 4)$$

$$\tau \circ \sigma = (1)(2\ 3\ 5)(4)$$

הערה: גמורה היא פונקציה אג' ואל. אין כל גמורה σ היא

הפיכה וקיימת לה גמורה הפוכה σ^{-1} כך שהקיים:

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = id$$

$$\sigma^{-1} \circ \sigma = id$$

כאשר id היא גמורת הזהות וכן $\sigma, \sigma^{-1} \in S_n$

$$\sigma \in S_7, \quad \sigma = (1\ 3\ 4)(2\ 6\ 5\ 7)$$

קולנו:

$\Downarrow$

$$\sigma^{-1} = (3\ 1\ 4)(6\ 2\ 7\ 5)$$

הערה: אילו גמורה. 'ה' $\sigma \in S_n$ גמורה.

אם מקיים $i < j$ $\sigma(i) > \sigma(j)$ לכן אילו.

$$\sigma = (1\ 2\ 3)$$

קולנו:

$$1 < 2$$

$$1 < 3$$

$$2 < 3$$

$$2 = \sigma(1) < \sigma(2) = 3$$

$$2 = \sigma(1) > \sigma(3) = 1$$

$$3 = \sigma(2) > \sigma(1) = 2$$

אילו

אילו

אילו

הלצה: יהי $\sigma \in S_n$, הסימן של σ $Sign(\sigma)$

$$Sign(\sigma) = (-1)^N \quad \text{מכונה על ידי}$$

כאשר $N = \text{מספר ההיפוכים במחזור } \sigma$

$$\text{אם } Sign(\sigma) = 1 \quad \sigma \text{ נקראת מחזור זוגי}$$

$$\text{אם } Sign(\sigma) = -1 \quad \sigma \text{ נקראת מחזור אי-זוגי}$$

דוגמה: עבור $\sigma = (1, 2, 3)$ כפי שהאיינו בדוגמה

$$Sign(\sigma) = (-1)^2 = 1 \quad \text{הקדמת וק}$$

דוגמה:

$$Sign(id) = 1$$

$$Sign((1, 2, 3)) = 1$$

$$Sign((1, 2)(3)) = -1$$

$$Sign((1, 3, 2)) = 1$$

$$Sign((1, 3)(2)) = -1$$

$$Sign((2, 3)(1)) = -1$$

המחזור הזוגי ב- S_n UNION ב- A_n

$$Sign(\sigma \circ \tau) = Sign(\sigma) \cdot Sign(\tau) \quad \text{זכור}$$

$$Sign(\sigma) = Sign(\sigma^{-1}) \quad \text{הסקנה}$$

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = id \quad \text{הזכור}$$

$$Sign(\sigma \circ \sigma^{-1}) = Sign(id)$$

$$Sign(\sigma) \cdot Sign(\sigma^{-1}) = 1$$

כל:

$$Sign(\sigma) = Sign(\sigma^{-1}) = 1$$

$$Sign(\sigma) = Sign(\sigma^{-1}) = -1 \quad \text{כל}$$

לעזרה: הס'מן של מחזור באורך k (כלומר שיש בו k איברים) הוא $(-1)^{k-1}$

מסקנה: ס'מן המחזור הוא כל ס'מני המחזורים.

דוגמה: $\sigma \in S_{11}$ $\sigma = (1 \ 3 \ 7 \ 5 \ 8 \ 11)(2 \ 4 \ 6)(9 \ 10)$

$(-1)^{6-1} = -1$ $(-1)^{3-1} = 1$ $(-1)^{2-1} = -1$

$\Downarrow$

$Sign(\sigma) = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 1$

דטרמיננט

הגדרה - דטרמיננט:

$|A| = \det A \in \mathbb{F}$ UNION A על $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} Sign(\sigma) \cdot a_{1, \sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n, \sigma(n)}$$

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$Sign(id) = 1$ $(1) \ (2)$ id

$\Downarrow$

$$Sign(id) \cdot a_{1, id(1)} \cdot a_{2, id(2)} = 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} = a_{11} \cdot a_{22}$$

$Sign(\sigma) = -1$ $(1, 2)$ σ

$\Downarrow$

$$Sign(\sigma) \cdot a_{1, \sigma(1)} \cdot a_{2, \sigma(2)} = -1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} = -a_{12} \cdot a_{21}$$

$\Downarrow$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

דוגמה 1.3:

$$\begin{aligned} & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ & - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \\ & - a_{13} \cdot a_{31} \cdot a_{22} \\ & - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \\ & + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ & + a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21} \end{aligned}$$

דוגמה

(1,2)(3)

(1,3)(2)

(2,3)(1)

(1,2,3)

(1,3,2)

הגדרה: $A \in F^{n \times n}$ ממשית (עיונית או מממית)

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

אולי

הוכחה:

בהינתן מטריצה ממשית עיונית, מתקיים $a_{ij} = 0$ אם $i > j$.
מאחר שהלוח המדויק של המכונה $a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

המורה שיונתן הלוח:

קיימים שני אינדקסים j, i כך ש- $\sigma(i) \neq i$, $\sigma(j) \neq j$.
בהינתן ציבור i מתקיים $\sigma(i) < i$ כלומר
(כי הוא נמצא מתחת לאנכסוס).

ואכן המכונה שמדירה ממורה לו היא 0.

כלומר כל הממורה שיונתן הלוח מממורה, ולכן:

$$|A| = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

משפט: אי-אזירות הקריאטורה:

$$A = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix} \quad \text{כך } A \in \mathbb{F}^{n \times n} \quad 1.$$

כלי:

$$\det \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_i \\ \vdots \\ -v_j \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix} \xleftarrow{i} \det \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_i \\ \vdots \\ -v_j \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix} \xleftarrow{j} \det \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_i + v_j \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix} \xleftarrow{i}$$

v_j מוסיף למ
 בשורה ה- i ולא
 בשורה ה- j .

2. אם A' מתקבלה מ- A על ידי כפל שורה j בסקלר $\alpha \in \mathbb{F}$ כל $|A'| = \alpha |A|$.

הוכחה:

1. נוסח פאסלר פז מ'ין:

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_i + v_j \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix} \xleftarrow{i} = ? \quad R_i(A') = (\alpha_{i1} + \alpha_{j1}, \dots, \alpha_{in} + \alpha_{jn})$$

משפט הקריאטורה של A'

$$|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sign}(\sigma) \alpha'_{1\sigma(1)} \cdots \alpha'_{i\sigma(i)} \cdots \alpha'_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sign}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \cdots (\alpha_{i\sigma(i)} + \alpha_{j\sigma(i)}) \cdots \alpha_{n\sigma(n)} =$$

נפרד על סכומים:

$$= \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \text{Sign}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{i\sigma(i)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}}_{|A|} + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \text{Sign}(\sigma) \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{j\sigma(i)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)}}_{|A''|} =$$

$$\downarrow$$

$$|A'| = |A| + |A''|$$

הוכחה:

2. שורה j של A' (ללא הכפל במקור)

$$R_j(A') = (\alpha a_{j,1}, \dots, \alpha a_{j,n})$$

$$|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sign}(\sigma) \alpha a_{1\sigma(1)} \dots \alpha a_{j\sigma(j)} \dots \alpha a_{n\sigma(n)} = \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \alpha |A|$$

כך נקבע.

בעיה:

היה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הכוללת שורה כלולה, כלומר $|A| = 0$.

פתרון:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

נניח ששורות 2 ו-3 כלולות, כלומר $a_{21} = a_{31}, a_{22} = a_{32}, a_{23} = a_{33}$.

$$(1, 2)(3) - a_{12} a_{21} a_{33} = -a_{12} a_{31} a_{23}$$

$$(1, 3)(2) - a_{13} a_{31} a_{22} = -a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$(2, 3)(1) - a_{23} a_{32} a_{11} = -a_{33} a_{22} a_{11}$$

המחשבה:

$$(1)(2)(3) \quad a_{11} a_{22} a_{33}$$

$$(1, 2, 3) \quad a_{12} a_{23} a_{31}$$

$$(1, 3, 2) \quad a_{13} a_{32} a_{21}$$

המחשבה:

נניח ששורות 1 ו-2 כלולות, כלומר $a_{11} = a_{21}, a_{12} = a_{22}, a_{13} = a_{23}$.

$$(1, 3)(2) \quad a_{13} a_{31} a_{22}$$

$$a_{13} a_{21} a_{32}$$

שם זה $-e$

המחשבה:

והנה (1, 3, 2) כלולה, המחשבה

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{1\sigma(1)} \dots \alpha_{n\sigma(n)} - \sum_{\tau \in S_n} \alpha_{1\tau(1)} \dots \alpha_{n\tau(n)} =$$

גמוריות
בזוגות
גמוריות
בזוגות

הוכחה:

$$= \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{1\sigma(1)} \dots \alpha_{n\sigma(n)}}_{\text{גמוריות בזוגות}} - \underbrace{\sum_{\tau \in S_n} \alpha_{(1,2)\tau(1)} \dots \alpha_{(1,2)n\tau(n)}}_{\text{גמוריות בזוגות}} = 0$$

(ג, א) היא גמורה המהווה בין האינדקסים של השורות הלכות.

הוא רק איש מקורו של τ הוא גמורה וכן הוא שורדנו או שהוכחנו
אילו ומכיון שהגמורה המדוברת היא לוגית (שהרי τ היא לוגית).

משקנה: אם A' התקבלה מ- A על ידי הפעלה $R_i + \alpha R_j \rightarrow R_i$ אז $|A| = |A'|$

$$|A'| = \begin{vmatrix} -v_1 & & \\ & \ddots & \\ -v_i + \alpha v_j & & \\ & \ddots & \\ -v_n & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v_1 & & \\ & \ddots & \\ -v_i & & \\ & \ddots & \\ -v_n & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -v_1 & & \\ & \ddots & \\ -\alpha v_j & & \\ & \ddots & \\ -v_n & & \end{vmatrix} =$$

הוכחה:

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} -v_1 & & \\ & \ddots & \\ -v_i & & \\ & \ddots & \\ -v_n & & \end{vmatrix}}_{|A|} + \alpha \underbrace{\begin{vmatrix} -v_1 & & \\ & \ddots & \\ -v_j & & \\ & \ddots & \\ -v_n & & \end{vmatrix}}_{\substack{v_j \text{ שווה } 0 \\ \text{מכיון ש} R_j \text{ נכנסה} \\ \text{לגמורה}}}} = |A|$$

כך נרש.

הסקנה: אם A' התקבלה מ- A על ידי החלפת שורה $R_i \leftrightarrow R_j$ אזי $|A'| = -|A|$

הוכחה:

$$0 = \begin{vmatrix} -v_1 & \dots & -v_j & \dots & -v_n \\ -v_1 & \dots & v_j & \dots & -v_n \\ -v_1 & \dots & -v_j & \dots & -v_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -v_1 & \dots & -v_j & \dots & -v_n \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} -v_1 & \dots & -v_j & \dots & -v_n \\ -v_1 & \dots & -v_j & \dots & -v_n \\ -v_1 & \dots & -v_j & \dots & -v_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -v_1 & \dots & -v_j & \dots & -v_n \end{vmatrix}}_{|A|} + \underbrace{\begin{vmatrix} -v_1 & \dots & -v_j & \dots & -v_n \\ -v_1 & \dots & v_j & \dots & -v_n \\ -v_1 & \dots & -v_j & \dots & -v_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -v_1 & \dots & -v_j & \dots & -v_n \end{vmatrix}}_{|A'|} \Rightarrow |A'| = -|A|$$

הסקנה כללית: המשפט: להפוך את המטריצה A ולהפוך את כל שורותיה n פעמים, אזי $|A'| = |A|$

1. החלפת שורה משנה סימן.
2. אם A' התקבלה מ- A על ידי כפל שורה בסקלר α אזי $|A'| = \alpha |A|$
3. אם A' התקבלה מ- A על ידי הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת אזי $|A'| = |A|$

דוגמה:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 19 \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1 \rightarrow R_1} 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 19 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1 \rightarrow R_3} 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot 11 = 33$$

$$|A| = |A^t|$$

הוכחה:

הוכחה:

$$|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \text{סכום האיברים החדשים}$$

$$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \text{Sign}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} = \text{סכום האיברים החדשים}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = |A|$$

לפי הטיעון של הוכחה זו, קיים בדיוק סך האיברים החדשים.
לפי הטיעון של הוכחה זו, קיים בדיוק סך האיברים החדשים.

משפט: יהיו V, W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל $\mathbb{F}$. $\dim W = m, \dim V = n$.

E בסיס ל- V , F בסיס ל- W .

אזי ההעתקה $\psi: \text{Hom}(V, W) \rightarrow \mathbb{F}^{m \times n}$ המוגדרת על ידי $\psi(T) = [T]_F^E$ היא איזומורפיזם.

הוכחה: על מנת להוכיח שהעתקה זו היא איזומורפיזם אנו צריכים להוכיח שהיא חז"ע ועל.

הוכחת חז"ע: יהיו $T, S: V \rightarrow W$ העתקות לינאריות כך ש- $\psi(T) = \psi(S)$. צ.ל.: $T = S$.

$$[T]_F^E = [S]_F^E, \text{ ולכן לפי הגדרת ההעתקה מתקיים } \psi(T) = \psi(S)$$

שתי המטריצות שוות, ולכן עמודותיהן שוות בהתאמה. כלומר:

$$C_i([T]_F^E) = C_i([S]_F^E)$$

נסמן $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V .

לפי ההגדרה מתקיים:

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(v_1)]_F & \cdots & [T(v_n)]_F \\ | & & | \end{pmatrix}$$

ובאופן דומה עבור $[S]_F^E$, ולכן נובע ש:

$$[T(v_i)]_F = [S(v_i)]_F$$

מיחידות ההצגה לפי בסיס נקבל:

$$T(v_i) = S(v_i)$$

שתי ההעתקות מתלכדות על וקטורי הבסיס, ולכן שוות על פי משפט. כלומר:

$$T = S$$

כנדרש.

הוכחת על: תהא מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. צ.ל.: $\psi(T) = A$. $\exists T \in \text{Hom}(V, W)$.

$$C_i(A) \in \mathbb{F}^m \text{ כך } A = \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1(A) & \cdots & C_n(A) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

מתכונות ההצגה לפי בסיס נובע שלכל $1 \leq i \leq n$ קיים $w_i \in W \sim \mathbb{F}^m$ כך ש- $[w_i]_F = C_i(A)$,

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ [w_1]_F & \cdots & [w_n]_F \\ | & & | \end{pmatrix} \text{ ולכן נוכל לכתוב:}$$

נוכיר ש- $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V .

נגדיר העתקה $T: V \rightarrow W$ על ידי $T(v_i) = w_i$ עבור $1 \leq i \leq n$.

על פי משפט ההגדרה של העתקות לינאריות קיימת העתקה לינארית כזו והיא יחידה.

מתקיים:

$$[T]_F^E = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ [T(v_1)]_F \\ | \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} | \\ [T(v_n)]_F \\ | \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ [w_1]_F \\ | \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} | \\ [w_n]_F \\ | \end{array} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ C_1(A) \\ | \end{array} & \cdots & \begin{array}{c} | \\ C_n(A) \\ | \end{array} \end{pmatrix} = A$$

ולכן $\forall A \in \mathbb{F}^{m \times n} \exists T \in \text{Hom}(V, W): \psi(T) = A$ כנדרש.

■

↓

הוכחנו ש- ψ חח"ע ועל ולכן היא איזומורפיזם בין $\text{Hom}(V, W)$ ל- $\mathbb{F}^{m \times n}$, כלומר $\text{Hom}(V, W) \sim \mathbb{F}^{m \times n}$.

מסקנה: מתקיים $\dim \text{Hom}(V, W) = \dim \mathbb{F}^{m \times n} = m \cdot n = \dim W \cdot \dim V$

אופרטור אינברסיה / שינוי 13

תכונות:

$$|A| = |A^t|, \quad A \in F^{n \times n}$$

הרעיון:

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ נקראת אונטרית אם מתקיים $A(\bar{A})^t = I - e$.
מהי הקראינטלה של A ?

המארה: ארכוב $|AB| = |A||B|$ - כפולת הקראינטלה.

השקרה:

פונקציה $f: F^{n \times n} \rightarrow F$ נקראת "כמו קראינטלה" אם היא מקיימת את התכונות:

הבאות:

1. $f(A)$ אינברסיה לכל שורה. כלומר $f(\alpha R_i + R_j) = \alpha f(R_i) + f(R_j)$

2. מגליפה סימן עם המלפת שורה. כלומר $f\left(\begin{smallmatrix} R_i \\ R_j \end{smallmatrix}\right) = -f\left(\begin{smallmatrix} R_j \\ R_i \end{smallmatrix}\right)$

3. מתאפסת כאשר $e - A$ יש שתי שורות זהות. כלומר $f\left(\begin{smallmatrix} R_i \\ R_i \end{smallmatrix}\right) = 0$

שערה:

פונקציה הקראינטלה היא "כמו קראינטלה".
הוכחנו את קיומן של תכונות אלו השיעור שעבר.

משפט - מידת הקראינטלה:

אם f היא פונקציה "כמו קראינטלה" אזי מתקיים $f(A) = \alpha|A| - e$ כאשר $\alpha = f(I)$.

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2(ad - bc)$$

ה'10 קלמ'10

ה'10 קלמ'10, "ה'10 קלמ'10" .1

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} a & b \\ c+\alpha a & d+\alpha b \end{pmatrix} &= 2(a(d+\alpha b) - b(c+\alpha a)) = \\ &= 2(ad - bc) + \alpha \cdot 2(ab - ba) = \\ &= f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \alpha f \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= 2(ad - bc) = -2(bc - ad) = -2(cb - da) = \\ &= -f \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad .2$$

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 2(ab - ba) = 0 \quad .3$$

$$f(I) = f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = 2$$

ה'10 קלמ'10

הוכחת משפט יחידות הקרמינר

נוכיח האינדוקציה על מספר הצעדים האינרמלי בעירוב המטריצה $I-I$.
 בסיס האינדוקציה: נעבור על פעולות השורה האפשריות.

א. נניח, A אינ $I-I$ על ידי פעולת המילוי שורה φ .

$$A \xrightarrow{\varphi} I$$

$$f(A) = -f(I)$$

$$f(A) = f(I) \cdot (-1)$$

$$f(A) = f(I) \cdot |A|$$

כלומר:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{לדוגמה:}$$

ב. אם φ היא הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת.

$$f(I) = f(\varphi(A)) = f(A) \Rightarrow f(A) = f(I) \cdot 1$$

↑
מליניריות
של כח

$$f(A) = f(I) \cdot |A|$$

ג. אם φ היא כפל שורה בסקלר $\beta \neq 0$.

$$I = \varphi(A)$$

↓

$$\left(\begin{aligned} f(\alpha R_i) &= \alpha f(R_i) + f(-0 \dots) \\ f(\alpha R_i) &= \alpha f(R_i) \end{aligned} \right) \quad f(I) = f(\varphi(A)) = \frac{1}{\beta} f(A)$$

↑
מליניריות
של כח

$$f(A) = \beta f(I)$$

$$f(A) = |A| \cdot f(I)$$

עד כאן בסיס האינדוקציה

הנגה האינדוקציה:

נניח שהלענה נכונה עבור k צעדים, כלומר נניח $f(A) = |A| f(I)$ ואל I שורה $k-1$ בעלות

צעד האינדוקציה:

נוכיח עבור $k+1$ צעדים.

$$f(\underbrace{f_{k+1} f_k \dots f_2 f_1(B)}_I) = f(I)$$

$$f(f_{k+1} f_k \dots f_2 (f_1(B))) = f(I)$$

$$C = f_1(B) \quad \text{נלדיק}$$

$$f_{k+1} \dots f_2(C) = I$$

מסקנה:

כלומר מספיקים k צעדים על מנת להזיז את C ל- I .

$$f(f_{k+1} \dots f_2(C)) = f(I)$$

$$* f(C) = f(I) \cdot |C|$$

לפי הנגה האינדוקציה

$$f(C) = f(f_1(B))$$

$$C = f_1(B) \quad \text{מאידך}$$

נעבור על האפשרויות של f_1 :

$$1. \text{ אם } f_1 \text{ היא האלמנט שמתו נקרא } e \quad f(C) = -f(B)$$

$$|C| = -|B|$$

$\Downarrow$ מציבים ב-*

$$-f(B) = f(I) \cdot (-|B|)$$

כלומר:

$$f(B) = f(I) |B|$$

2. אם f_1 היא המסב כפולה של שורה אחרת.

$$f(C) = f(B)$$

$$|C| = |B|$$

$\Downarrow$ מציבים ב-*

$$f(B) = f(I) \cdot |B|$$

3. אם f היא כפול שורה בסדר $\beta \neq 0$.

$$f(C) = \frac{1}{\beta} f(B)$$

$$|C| = \frac{1}{\beta} |B|$$

$\Downarrow$ מציבים ב-*

$$\frac{1}{\beta} f(B) = f(I) \frac{1}{\beta} |B|$$

$$f(B) = f(I) |B|$$

$\square_N$

משפט כפולים הקדמיניטלה:

$$|AB| = |A| |B|$$

$A, B \in F^{n \times n}$ ולי

הוכחה:

ג.ה. $B \in F^{n \times n}$ נסמן

g היא "כפול קדמיניטלה" נניח f אינאריות וסדר גבוה של כפול קדמיניטלה.

$$g(A) = g(I) \cdot |A|$$

זכור, לפי משפט הידוע:

$$g(I) = |I \cdot B| = |B|$$

ואם

$$g(A) = |AB|$$

בסך הכל:

$$g(A) = g(I) \cdot |A| = |B| \cdot |A| = |A| \cdot |B|$$

$\Downarrow$

$$|AB| = |A| |B|$$

הצגה: אפשר להראות בצורה "כפול קדמיניטלה" את המשפט הבא:

$$\begin{vmatrix} B & C \\ 0 & D \end{vmatrix} = |B| \cdot |D|$$

$B \in F^{m \times m}$, $D \in F^{n \times n}$ ולי

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

הוכחה:

$$|A| \neq 0 \iff A \text{ הפיכה}$$

הוכחה:

A הפיכה $\iff$ טרן חריג A כמכפלה של מטריצות אלמנטריות

$$A = E_{i_1} \cdot \dots \cdot E_{i_r}$$

$$|A| = |E_{i_1} \cdot \dots \cdot E_{i_r}| = |E_{i_1}| \cdot \dots \cdot |E_{i_r}| \quad (\text{גכיוון חזני קיימות אלמנטריות וכו'})$$

האופציות לדטרמיננטה של E_i :

$$|E_i| \neq 0 \quad ; \quad \text{לכן} \begin{cases} |E_i| = -1 & E_i - \text{החלפת שורה} \\ |E_i| = 1 & E_i - \text{הוספת כפולה של שורה} \\ |E_i| = \alpha & E_i - \text{כפל שורה בסקלר } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$|A| \neq 0 \iff$$

2. מכפלה של הפיכות היא הפיכה..

$$A = A_1 \cdot \dots \cdot A_n$$

הוכחה:

$$|A| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

$$\Rightarrow |A| \neq 0$$

לכן A הפיכה.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad 3. \text{ אם } A \text{ הפיכה אז}$$

הוכחה: A הפיכה לכן קיימת A^{-1} כך $A \cdot A^{-1} = I$

$$|A \cdot A^{-1}| = |I|$$

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |I|$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$|A| \neq 0 \quad \text{לכן}$$

$$|A'| = |A|^k$$

4. הכלל ב-1

הכלל מתיבת השיעור:

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ נקראת אונטרית אם מתקיים $A \cdot (\bar{A})^t = I$ -
מהי הקטגוריה של A ?

$$|A \cdot (\bar{A})^t| = |I|$$

בהכרח:

$$|A| \cdot |(\bar{A})^t| = 1$$

$$|A| \cdot |\bar{A}| = 1$$

$$|\bar{A}| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sign}(\sigma) \bar{a}_{1\sigma(1)} \dots \bar{a}_{n\sigma(n)} = \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \text{Sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}} = \overline{|A|}$$

$$|A| \cdot |\bar{A}| = 1$$

$$z \cdot \bar{z} = 1$$

$$|z|^2 = 1$$

$$a^2 + b^2 = 1$$



$$|A| = C \cdot S \cdot \alpha$$

לכן:

$$|A| = z \quad \text{ונקרא: } z \text{ נורמ}$$

ערבור לווית α כלשהי.

כלומר, $|A|$ הוא מספר שמתבטל על מרחב המידה.

$$|(a)| = a$$

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

כאשר i נקבע על ידי המשתמש, וכן A_{ij} - המאטריצה המתקבלת A - N שורה i ואלו עמודה j .
(הערה: A_{ij} נקראו מינור - וניתן גם לכתוב במקומו M_{ij})

דוגמה 1:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ?$$

$j=1$

$$(-1)^{1+1} \cdot a \cdot |d| = ad$$

$j=2$

$$(-1)^{1+2} b \cdot |c| = -bc$$

$j=2$

$\downarrow$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ?$$

$j=3$, 2

$$(-1)^{3+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$j=1$

$$(-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 48$$

$j=2$

$$(-1)^{3+3} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -27$$

$j=3$

$\downarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0 + 48 - 27 = 21$$

הוכחת המשפט:

$$A = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ -R_1 & & & \\ & & & \\ & & & -R_n \end{pmatrix} \leftarrow R_i$$

$$R_i = a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n$$

מחקרים:

$$\Downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n & -R_1 & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & -R_n \end{pmatrix} \leftarrow R_i$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -R_1 & & \\ a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n & & \\ & & \\ & & -R_n \end{vmatrix} = a_{i1} \begin{vmatrix} -R_1 & & \\ -e_1 & & \\ & & \\ & & -R_n \end{vmatrix} + \dots + a_{in} \begin{vmatrix} -R_1 & & \\ -e_n & & \\ & & \\ & & -R_n \end{vmatrix}$$

לכאן:

לפי קביעות של דטרמיננטה

$$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \\ \text{מחקר } i & & \text{מחקר } i \\ i, i & = & i, j = i, i \end{matrix}$$

על מנת להצמיד את ה-1 למקום ה- i, i

יש להבין:

ה- i - כלול שורה.

ה- j - כלול עמודה.

$$a_{i1} \underbrace{\begin{vmatrix} e_1 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}}_{B_1} + \dots + a_{in} \underbrace{\begin{vmatrix} e_n \\ R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}}_{B_n}$$

קביעות:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{(i-1)+j-1} \cdot a_{ij} |B_j| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |B_j|$$

כאשר מחקרים: $|B_j| = |M_{ij}|$ (לפי קביעות של דטרמיננטה של מטריצה חזקה).

$$\Downarrow$$

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

המטריצה הנלווית:

$$(\text{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ji}| \quad \text{כלי } A \in \mathbb{F}^{n \times n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

הנכנסים:

$$(\text{adj}(A))_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$$

$$(\text{adj}(A))_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2 \Rightarrow \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{adj}(A))_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3$$

$$(\text{adj}(A))_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$$

הכנס:

$$A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = |A| \cdot I$$

הנכנסים:

$$A \cdot \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I$$

$$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

קביעת המכונה:

$$C = A \cdot B \quad \text{כאשר } B = \text{adj}(A)$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} =$$

כלי $i=j$ מכונה

$$= \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot (-1)^{i+k} |M_{ki}| \stackrel{\text{סדרה מסוימת}}{=} |A|$$

$C_{ij} = 0$ כלי $i \neq j$ מכונה

$$A \cdot \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & |A| \end{pmatrix}$$