בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ד, מועד ב'

19.9.2024, ט"ז באלול התשפ"ד

מרצים: אחיה בר-און, שמעון ברוקס, דורון פרלמן, ארז שיינר.

מתרגלים: עידו גולדנברג, רועי חסון, שירה ידעי, יונתן סמידוברסקי, עידו פלדמן, עידו קצב, רועי רונן.

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות .
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (9 נקודות כל סעיף) תהא U קבוצה ותהיינה $A,B,C\subseteq U$. לכל תת קבוצה $X\subseteq U$ נסמן את המשלים $X^c=U\backslash X$. בנוסף, לכל שתי קבוצות S_1,S_2 נסמן את ההפרש הסימטרי $S_1\triangle S_2$ להיות הקבוצה $S_1\triangle S_2=(S_1\backslash S_2)\cup(S_2\backslash S_1)$.
הוכיחו או הפריכו את הבאים:

   (א) $P(A)\triangle P(B)\subseteq P(A\triangle B)$.

   (ב) $P\left(A^c\right)\cap P(A)=\{\emptyset\}$.

   (ג) אם $[(B\subseteq C\vee C\subseteq B)\wedge(B\subseteq A\vee A\subseteq B)]$ אז $(A\subseteq C\vee C\subseteq A)$.

2. (13 נקודות) הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת את הטענה הבאה: לכל n טבעי מתקיים כי $\frac{6^n-1}{5}\in\mathbb{Z}$.

3. (8 נקודות כל סעיף) תהא X קבוצה לא ריקה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
(תזכורת: פונקציות מ X ל X ויחסים על X הם בפרט קבוצות. מכאן שניתן לעשות הפרש סימטרי בין שתי פונקציות/יחסים)

   (א) לכל שתי יחסים סימטריים R,S על X מתקיים $R\triangle S$ יחס סימטרי על X.

   (ב) לכל שתי יחסים טרנזיטיביים R,S על X מתקיים $R\triangle S$ יחס טרנזיטיבי על X.

   (ג) לכל שתי פונקציות $f,g\in X^X$ מתקיים $f\triangle g\notin X^X$.

4. לכל $A\subseteq\mathbb{R}$ נגדיר יחס T על $\mathbb{R}$ על ידי הכלל

$$xTy\iff(x=y)\vee(\exists a\in A:x<a\leq y)$$

ענו על הבאים:

   (א) (8 נקודות) הוכיחו כי T יחס סדר חלקי על $\mathbb{R}$.

   (ב) (8 נקודות) הוכיחו שאם $\mathbb{R}\backslash A$ בת מנייה אז T יחס סדר משווה/מלא/לינארי (כל אחד והמינוח שראה בהרצאה).

   (ג) (4 נקודות כל תת סעיף) עבור

$$A=(-\infty,0]\cup[1,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 0\vee x\geq 1\}$$

   והקטע $B=[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leq x\leq 1\}$ הוכיחו או הפריכו:

      i. קיים $\sup B$ (ביחס ל T).

      ii. קיים $\inf B$ (ביחס ל T).

5. (7 נקודות כל סעיף) תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נגדיר את היחס S על $\mathbb{R}$ כך:

$$(a,b)\in S\iff f^{-1}\left[\{a\}\right]=f^{-1}\left[\{b\}\right]$$

ענו על הבאים:

   (א) הוכיחו כי S הוא יחס שקילות על $\mathbb{R}$.

(ב) הוכיחו: אם f אינה על אז $|\mathbb{R}/S| = |\text{Img}(f)| + 1$.

(ג) הוכיחו כי קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת שלכל $y\in\mathbb{R}$ מתקיים $\left|f^{-1}\left[\{y\}\right]\right| = \aleph_0$.
רמז אפשרי: $\aleph_0 \cdot \aleph = \aleph$.