

קורס: 88-231-01,05,08  
מרצים: מ. כץ, ש. הורוביץ  
כ"ז אלול תש"ע

## מבחן בפונקציות מרוכבות מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות.  
כל חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט.  
משך הבחינה שעתיים. בהצלחה!

1. נניח ש- $z$  מספר מרוכב ונניח ש- $z^2 + \frac{1}{\bar{z}^2}$  מספר ממשי. הוכיחו שבהכרח  $z$  ממשי או  $iz$  ממשי.

2. נניח ש- $f(z)$  מוגדרת ואנליטית בסביבה של  $z_0$  ונניח ש- $f(z_0) \neq 0$  נגדיר  $g(z) = \log|f(z)|$ . הוכיחו ש- $g(z)$  הרמונית באיזו סביבה של  $z_0$ .

3. חשבו  $\int_{\gamma} [\sin z + \bar{z}] dz$  כאשר  $\gamma$  היא המסילה המוגדרת ע"י

$$z(t) = \begin{cases} e^{it} & : -\pi \leq t \leq 0 \\ 1-2t & : 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

4. חשבו:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+16)^2} dx$ . הצדיקו את תשובתכם.

5. א. חשבו טור לורן שמתכנס ב- $\square$  פרט לנקודה 0 עבור הפונקציה

$$f(z) = (2z^5 - 4z^2) \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

ב. חשבו את  $\text{Res}(f, 0)$ .

6. קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה  $9z^5 e^z - 2z^3 + 1$  בעיגול  $B(0,1)$ . הצדיקו את תשובתכם.

