

לינארית 2 - בוחן

28.5.2018

הנחיות:

- משך הבוחן: שעה וחצי.
 - ללא מחשבוניס או חומר עזר.
 - בדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים
- ת.ז ו\או שם מלא.
- כדי שנוכל להחזיר את הבחנים ביעילות ציינו את מספר הקבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים:
- * 03 - פולה בשני.
 - * 05 - פולה בשלישי.
 - * 04 - עוזי בשלישי ערב.
 - * 06 - עוזי ברביעי בוקר.
 - * 07 - עוזי בשלישי בוקר.

שאלה 1.

1. [20 נק] תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מטריצה. נסמן ב-

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

את הפולינום האופייני, הוכח ש- $a_0 = (-1)^n |A|$.

פתרון.

נציב בפולינום האופייני $\lambda = 0$ ונקבל

$$p_A(0) = 0^n + a_{n-1}0^{n-1} + a_{n-2}0^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0$$

וצד שני לפי הגדרת הפולינום האופייני נקבל ש-

$$p_A(0) = |0I - A| = |-A| = (-1)^n |A|$$

לכן

$$a_0 = p_A(0) = (-1)^n |A|$$

2. [30 נק] תהי $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ כך ש- $|A| < 0$, הוכח שהיא לכסינה.

פתרון.

הפולינום האופייני הוא מהצורה

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$$

בסעיף הקודם הוכחתם ש-

$$c = (-1)^n |A|$$

כלומר במקרה שלנו $n = 2$ לכן $c < 0$, נתבונן בדיסקרימיננטה של הפולינום האופייני ונקבל ש-

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

ולכן קיימים שני שורשים ממשיים שונים! מכאן A לכסינה.

שאלה 2.

1. [20 נק] תהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית הפיכה ו- B_1, B_2 בסיסים ל- V הוכח שמתקיים

$$[T^{-1}]_{B_2}^{B_1} = \left([T]_{B_1}^{B_2} \right)^{-1}$$

פתרון.

נשים לב שמתקיים

$$[T \circ T^{-1}]_{B_1}^{B_1} = [T]_{B_1}^{B_2} [T^{-1}]_{B_2}^{B_1}$$

ומצד שני

$$[T \circ T^{-1}]_{B_1}^{B_1} = [Id]_{B_1}^{B_1} = I$$

לכן בסהכ נקבל ש-

$$[T]_{B_1}^{B_2} [T^{-1}]_{B_2}^{B_1} = I$$

לכן

$$[T^{-1}]_{B_2}^{B_1} = ([T]_{B_1}^{B_2})^{-1}$$

2. [30 נק] תהיה $T : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ העתקה לינארית המוגדת באופן הבא

$$T(p(x)) = p(1) + (p(1) - p(0))x + \left(\frac{p''(5)}{2}\right)x^2$$

מצא את T^{-1} . (רמז: מומלץ לעזר בסעיף 1)

פתרון.

ראשית נמצא את העתקה באופן מפורש

$$\begin{aligned}
T(a + bx + cx^2) &= \\
a + b + c + (a + b + c - a)x + cx^2 &= \\
a + b + c + (b + c)x + cx^2
\end{aligned}$$

נמצא את במטריצה המייצגת של T לפי הבסיס הסטנדרטי

$$[T]_S^S = \begin{pmatrix} [T(1)]_S & [T(x)]_S & [T(x^2)]_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1]_S & [1+x]_S & [1+x+x^2]_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נמצא את $([T]_S^S)^{-1}$ בעזרת גאוס גורדן

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

לכן

$$([T]_S^S)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לפי סעיף 1

$$[T^{-1}]_S^S = ([T]_S^S)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} [T^{-1}(1)]_S & [T^{-1}(x)]_S & [T^{-1}(x^2)]_S \end{pmatrix} = [T^{-1}]_S^S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} [T^{-1}(1)]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ [T^{-1}(x)]_S = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ [T^{-1}(x^2)]_S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} [T^{-1}(1)]_S = 1 \\ [T^{-1}(x)]_S = -1 + x \\ [T^{-1}(x^2)]_S = -x + x^2 \end{cases}$$

לפי משפט ההגדרה נקבל ש-

$$\begin{aligned} T^{-1}(a + bx + cx^2) &= \\ aT^{-1}(1) + bT^{-1}(x) + cT^{-1}(x^2) &= \\ a + b(-1 + x) + c(-x + x^2) &= \\ a - b + (b - c)x + cx^2 & \end{aligned}$$

בהצלחה!