חדו"א 1 לאודיסאה – 86-147 – בוחן – 4.1.24

1. (36 נק') לכל הערכים של הפרמטרים $a,b\in\mathbb{R}$ קבעו האם הפונקציה הבאה רציפה ב$x=0$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(ax)}{x} & x>0\\ b-a & x=0\\ (1+2x)^{\frac{1}{x}} & x<0\end{cases}$$

פתרון:

על מנת שהפונקציה תהא רציפה ב$x=0$ דרוש שהגבול בנקודה יהיה שווה לערך בנקודה, ומספיק שהגבול מימין יהיה שווה לגבול משמאל ויהיה שווה לערך בנקודה

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(ax)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(ax)}{ax}\cdot a=a$$

שימו לב, פתרון זה נכון עבור $a\neq0$ שהרי חילקנו וכפלנו בa (לבודקים – תורידו כמה נקודות למי שפספס את זה)

מובן שכאשר $a=0$ מתקיים כי

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(ax)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(0\cdot x)}{x}=0$$

כעת נעבור לגבול בצד השני

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\left\{1^{-\infty},e\text{ כלל ה}\right\}=e^{\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}\cdot(1+2x-1)}=e^{\lim_{x\to0^-}2}=e^2$$

דרך שנייה

$$(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2\to e^2$$

(מי שלא הסביר בשום דרך – להוריד)

2. (36 נק') תהי פונקציה $f(x)$ ונביט בקבוצת ערכי ציר הy שלה $A = \{f(x)|0 \le x \le 1\}$, בקטע $[0,1]$.

מצאו את החסם העליון $\sup(A)$ והוכיחו תשובתכם, עבור שתי הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$.

נוכיח כי $\sup(A) = 1$.

ראשית אוכיח כי 1 הוא חסם מלעיל (לא מלרע) של A:

אכן, לכל $a \in A$ מתקיים כי $a = f(x)$ עבור $x \in [0,1]$ נחלק למקרים:

אם $x \in [0,1)$ אזי

$$f(x) = x < 1$$

אם $x = 1$ אזי

$$f(x) = 0 < 1$$

לכן עד כה הוכחנו כי 1 חסם מלעיל (לא מלרע) של A.

כעת נוכיח שכל מספר אשר קטן מ1 אינו חסם מלעיל ולכן 1 הוא החסם העליון של הקבוצה.

יהי $M < 1$ עליי להוכיח כי אינו חסם מלעיל.

נחלק למקרים.

אם $M < 0$ אזי $f(0) = 0 \in A$ ולכן M אינו חסם מלעיל של A וסיימנו.

אחרת, $0 \le M < 1$ ואז $f\left(\frac{1+M}{2}\right) = \frac{1+M}{2} \in A$ והרי $\frac{1+M}{2} > M$ וסיימנו.

כיוון ש $\frac{1+M}{2}$ אמצע הקטע בין M לבין 1.

ב. $f(x)=\begin{cases}\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) & 0<x\le 1\\ 0 & x=0\end{cases}$.

בסעיף זה אעזר בתנאי השקול לחסם עליון,

צריך להוכיח שM חסם מלעיל של הקבוצה, וכן לכל $\varepsilon>0$ קיים איבר בקבוצה שגדול מ $M-\varepsilon$.

ראשית נוכיח כי 1 חסם מלעיל של A.

יהי $a\in A$ כלומר $a=f(x)$ אזי

$$a=f(x)\le|f(x)|=\left|\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le 1$$

כעת, יהי $\varepsilon>0$

נביט בסדרה $a_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ בבירור מתקיים כי $0<a_n\to 0$.

כעת

$$f(a_n)=\cos(a_n)\sin\left(\frac{1}{a_n}\right)=\cos(a_n)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\cos(a_n)\to 1$$

כמובן שלכל n מתקיים כי $f(a_n)\in A$

מסקנה: קיים n עבורו

$$1-\varepsilon<f(a_n)<1+\varepsilon$$

כלומר מצאנו $a\in A$ עבורו $1-\varepsilon<a$ כפי שרצינו, ומישלנו.

(אני מניח שסעיף זה ישאר ריק אצל רוב האנשים פרט לניחוש שהחסם העליון שווה ל1, אפשר לתת על זה נקודה או שתיים.)

3. (36 נק') נביט בסדרה המוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה $a_{n+1}=2a_n-\frac{1}{a_n}$, המקיימת כי $a_1>1$.

פתרון בקישור הבא.

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

מי שכאן הראה כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ולכן הסדרה מונוטונית עולה, ניתן להוריד לו קצת אם לא הוכיח כי הסדרה חיובית באינדוקציה.

אראה דרך נוספת לנסיון פתרון סעיף זה, המובילה להורדת ניקוד כמעט וודאית.

נוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים כי $a_{n+1} \geq a_n$

בדיקה: עבור $n = 1$ צריך להוכיח כי $a_2 \geq a_1$ כלומר צריך להוכיח כי $a_2 - a_1 \geq 0$

אכן

$$a_2 - a_1 = a_1 - \frac{1}{a_1} = \frac{a_1^2 - 1}{a_1} \geq 0$$

כיוון שהמונה חיובי כי נתון $a_1 > 1$ וכמובן גם המכנה.

יהי n עבורו $a_{n+1} \geq a_n$ צ"ל כי $a_{n+2} \geq a_{n+1}$

צ"ל כי

$$a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}} \geq a_n + \frac{1}{a_n}$$

מי שעוצר כאן ואומר שזה נובע מהנחת האינדוקציה אינו אלא טועה! (ויש להוריד את מרבית הנקודות)

שהרי אמנם

$$a_{n+1} \geq a_n$$

אבל

$$\frac{1}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{a_n}$$

אין לי רעיון ממש טוב איך להמשיך מכאן, פרט ל

$$a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}} \geq a_{n+1}$$

ואז חוזרים פחות או יותר לפתור בקישור המצורף.

ב. חשבו את גבול הסדרה.

להוריד ברוחב לב את מי שהגיע לכך שהגבול הוא 1, הרי זה רוב הסעיף.

מי שאמר בסעיף זה כי כיוון ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ אזי $a_n \to \infty$ מאבד את כל הנקודות, כיוון שזה נכון לכל סדרה מונוטונית, ולא מבדיל כלל בין סדרות חסומות ללא חסומות ולכן אין כאן תוספת על פני הסעיף הקודם.

צריך שגבול המנה יהיה גדול מ1, ולרוב אי אפשר לחשב בתרגילים אלה את גבול המנה.