

פתרון בוחן במשוואות דיפרנציאליות רגילות

משך הבחינה: שעה ורבע חומר עזר מותר: מחשבון פשוט.

ענו על כל השאלות הבאות. נמקו את צעדיכם!

שאלה 1:

מצאו פתרון למשוואה $y' + 2y - y^2 e^x = 0$ עבורו $y(-1) = 3$.

שאלה 2:

מצאו פתרון למשוואה $y \sin(2x) dx + (y^2 - \sin^2(x)) dy = 0$ עבורו $y(0) = 1$.

אמנם המשוואה כתובה בצורה הדיפרנציאלית, אבל נזכור שזה לא בהכרח מעיד על דרך הפתרון.

למרות אזהרה זו, כן ננסה קודם מדויקת.

$$(y \sin(2x))_y = \sin(2x)$$

$$(y^2 - \sin^2(x))_x = -2 \sin(x) \cos(x) = -\sin(2x)$$

המד"ר אינה מדויקת. נבדוק גורם אינטגרציה

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2 \sin(2x)}{y^2 - \sin^2(x)}$$

זה נראה זוויתי, בוודאי אינו תלוי ב- x בלבד.

ננסה גורם אינטגרציה לפי y

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{-2 \sin(2x)}{y \sin(2x)} = -\frac{2}{y}$$

גורם האינטגרציה הוא

$$\mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y}} = e^{-2 \ln(y)} = (e^{\ln(y)})^{-2} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

נכפול בו

$$\frac{\sin(2x)}{y} dx + \left(1 - \frac{\sin^2(x)}{y^2}\right) dy = 0$$

נבדוק שאכן המד"ר מדויקת

$$\left(\frac{\sin(2x)}{y}\right)_y = -\frac{\sin(2x)}{y^2}$$

$$\left(1 - \frac{\sin^2(x)}{y^2}\right)_x = -\frac{\sin(2x)}{y^2}$$

נפתור את המד"ר המדוייקת

$$F = \int \frac{\sin(2x)}{y} dx = -\frac{\cos(2x)}{2y} + c(y)$$

נגזור ונשווה למקדם השני

$$\frac{\cos(2x)}{2y^2} + c'(y) = 1 - \frac{\sin^2(x)}{y^2}$$

$$c'(y) = 1 - \frac{\cos(2x) + 2 \sin^2(x)}{2y^2} = 1 - \frac{1}{2y^2}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2 \sin^2(x)$$

$$\cos(2x) + 2 \sin^2(x) = 1$$

לכן

$$c(y) = \int \left(1 - \frac{1}{2y^2}\right) dy = y + \frac{1}{2y}$$

כלומר סה"כ

$$F = -\frac{\cos(2x)}{2y} + y + \frac{1}{2y}$$

והפתרון נתון ע"י

$$-\frac{\cos(2x)}{2y} + y + \frac{1}{2y} = C$$

נציב את תנאי ההתחלה $y(0) = 1$

$$-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = C$$

$$C = 1$$

הפתרון נתון באופן סתום ע"י

$$-\frac{\cos(2x)}{2y} + y + \frac{1}{2y} = 1$$

נמצא את הפתרון (נבודד את y)

נכפול ב y

$$-\frac{\cos(2x)}{2} + y^2 + \frac{1}{2} = y$$

$$y^2 - y + \frac{1 - \cos(2x)}{2} = 0$$

$$\begin{aligned}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1 - \cos(2x)}{2} &= 0 \\ \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} - \frac{2 - 2\cos(2x)}{4} = \frac{-1 + 2\cos(2x)}{4} \\ y - \frac{1}{2} &= \pm \sqrt{\frac{-1 + 2\cos(2x)}{4}} \\ y &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-1 + 2\cos(2x)}{4}}\end{aligned}$$

שוב צריך לוודא את תנאי ההתחלה! נציב $x = 0$ ונקבל

$$1 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

ולכן חייב לבחור את הפלוס

סה"כ הפתרון הוא

$$y = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-1 + 2\cos(2x)}{4}}$$

שאלה 3:

ידוע כי טמפרטורת הגוף מקיימת את חוק הקירור של ניוטון: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$ כאשר T_0 היא טמפרטורת הסביבה, ו- k קבוע כלשהו. במטבח "mad line" עם טמפרטורה מבוקרת של 20 מעלות צלזיוס, מחממים סנדוויץ' עם פסטרמה.

טמפרטורת הסנדוויץ' בעת הוצאתו מן התנור היא 100 מעלות. אחרי 20 דקות הוא התקרר ל-60 מעלות. אחרי כמה דקות נוספות תהיה טמפרטורת הסנדוויץ' 30 מעלות?

בהצלחה!

נוסחאות מד"ר

חלק א' – מד"ר מסדר ראשון:

כתיב דיפרנציאלי – את המד"ר $y' = f(x, y)$ נוכל לכתוב באופן שקול $dy = f(x, y)dx$

מד"ר פרידה – פתרון למד"ר מהצורה $f(x)dx = g(y)dy$ מקיים את המשוואה הסתומה $F(x) = G(y) + C$

כאשר $F(x) = \int f(x)dx$ וכן $G(y) = \int g(y)dy$.

מד"ר הומוגנית – מד"ר מהצורה $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$. נציב $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $z = \frac{y}{x}$ ונקבל $\int \frac{1}{g(z)-z} dz = \ln|x| + C$. נמצא את z ונציב לקבל $y = xz$.

ניתן להציג את $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ אם ורק אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים כי $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

במקרה זה $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

מד"ר לינארית מסדר ראשון – פתרון למד"ר $y' + a(x)y = b(x)$ נתון ע"י הנוסחה

$$y = e^{-A(x)} \left(C + \int b(x)e^{A(x)} dx \right)$$

כאשר $A(x) = \int a(x)dx$.

משוואת ברנולי – יהי $n \neq 0, 1$, מד"ר מהצורה $y' + a(x)y = b(x)y^n$.

נציב $z = y^{1-n}$ ונקבל את המד"ר $z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$.

נמצא את z ונחליף $y = z^{\frac{1}{1-n}}$.

מד"ר מדוייקת – מד"ר מהצורה $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

הפתרון של מד"ר מדוייקת מקיים את המשוואה הסתומה $F(x, y) = C$ כאשר $F_x = P, F_y = Q$.

שלבי הפתרון:

1. נבדוק אם היא מדוייקת – המד"ר מדוייקת אם ורק אם $P_y = Q_x$.

2. נמצא את F ע"י חישוב אינטגרל $F = \int Pdx + c(y)$.

3. נגזור ונשווה למקדם השני $Q = \frac{\partial}{\partial y}(\int Pdx + c(y))$, וכך נמצא את $c(y)$.

4. הפתרון נתון באופן סתום ע"י $F(x, y) = C$.

גורם אינטגרציה – מד"ר מהצורה $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, נחפש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ שכפל בו יהפוך את המד"ר למדוייקת.

שלבי התהליך:

1.

א. יש גורם אינטגרציה $\mu(x)$ אם הביטוי $\frac{Py-Qx}{Q}$ אינו תלוי ב y ,

במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(x) = e^{\int \frac{Py-Qx}{Q} dx}$

ב. יש גורם אינטגרציה $\mu(y)$ אם הביטוי $\frac{Qx-Py}{P}$ אינו תלוי ב x ,

במקרה זה, גורם האינטגרציה הוא $\mu(y) = e^{\int \frac{Qx-Py}{P} dy}$

2. נכפול בגורם האינטגרציה, ונוודא שקיבלנו מד"ר מדוייקת (לא חובה מתמטית, אבל מומלץ מאד).

3. נפתור את המד"ר המדוייקת שקיבלנו.

בעיית קושי למד"ר מסדר ראשון – מציאת פונקציה y המקיימת את המד"ר $y' = f(x, y)$ וכן את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$.

המשוואה האינטגרלית – בעיית הקושי שקולה למשוואה האינטגרלית $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$

משפט הקיום והיחידות – תהי $f(x, y)$ רציפה ובעלת נגזרת חלקית f_y רציפה בתחום $|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b$.

נסמן ב M את החסם של $|f(x, y)|$ בתחום, ונסמן $a' = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

אזי קיים פתרון יחיד y לבעיית הקושי $y' = f(x, y)$ עם תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ בתחום $|x - x_0| \leq a'$.

חלק ב' – נוסחאות פיזיקליות בסיסיות:

משמעות הנגזרות –

1. $y(t)$ מיקום

2. $v(t) = y'(t)$ מהירות

3. $a(t) = y''(t)$ תאוצה

החוק השני של ניוטון - $F = ma$ כאשר F הוא סכום הכוחות, m היא המסה של הגוף, וכן a הוא התאוצה של הגוף

כוח המשיכה של כדור הארץ – עבור גוף "קרוב" לפני כדור הארץ נניח כי כוח המשיכה הוא mg כאשר m היא המסה של הגוף וכן g הוא קבוע תאוצת הכובד של כדור הארץ ($g \approx 9.82 \text{ m/sec}^2$).

כוח קפיץ – קפיץ בעל קבוע קפיץ k מפעיל כוח פרופורציונלי למרחק מנקודת הרפיון בכיוון ההפוך.

אם y הוא המיקום ביחס לנקודת הרפיון, אז הקפיץ יפעיל כוח של $-ky$.