

תרגיל בית 12 מבוא לחוגים ומודולים 88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1. יהיו $R \subseteq S$ חוגים, ויהי $a \in S$ שהוא אלגברי מעל R והפיך ב- S . הראו כי a^{-1} גם הוא אלגברי מעל R .

שאלה 2. מצאו באופן מפורש פולינום מתוקן מעל \mathbb{Z} המאפס את $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

שאלה 3. יהי F שדה שהוא הרחבה שלמה של תחום שלמות R . הוכיחו ש- R הוא שדה.

שאלה 4. יהי R תחום דדקינד, ויהיו $I, J \triangleleft R$ אידיאלים. אם $I = P_1^{e_1} \cdots P_r^{e_r}$ ו- $J = P_1^{f_1} \cdots P_r^{f_r}$ עבור $P_i \triangleleft R$ ראשוניים ו- $e_i, f_i \geq 0$, אז

$$I + J = P_1^{\min\{e_1, f_1\}} \cdots P_r^{\min\{e_r, f_r\}}$$

$$I \cap J = P_1^{\max\{e_1, f_1\}} \cdots P_r^{\max\{e_r, f_r\}}$$

$$IJ = P_1^{e_1+f_1} \cdots P_r^{e_r+f_r}$$

שאלה 5. מצאו את הפירוק של האידיאלים $2\mathcal{O}_D$ ו- $3\mathcal{O}_D$ למכפלה של אידיאלים ראשוניים בחוג \mathcal{O}_D עבור $D = 11, 13$.

שאלה 6. האם $\mathbb{Z}[x]$ הוא תחום דדקינד? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 7. יהי R תחום דדקינד, ויהי $a \neq 0$ אידיאל שברי של R .

א. הראו כי קיים $r \in R$ שעבורו $ra \subseteq R$, וכי ra הוא אידיאל של R .

ב. הסיקו כי קיימים אידיאלים $I, J \triangleleft R$ שעבורם $0 \neq I, J$ ו- $a = IJ^{-1}$.

שאלה 8 (רשות). יהי F שדה. הראו שהחוג $F[x, y]/\langle x^2 - y^3 \rangle$ הוא תחום שלמות שאינו סגור בשלמות (בשדה השברים שלו).

בהצלחה!