פרק 4

פונקציות

4.1 כללי

כשם שפונקציה $f{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המטופלת במסגרת חשבון דיפרנציאלי מזוהה בעצם עם הגרף שלה שהוא העקום במישור $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ המורכב מכל הזוגות מהצורה $(x, f(x))$, נגדיר באופן כללי פונקציה f מקבוצה A (התחום) לקבוצה B (הטווח), כתת קבוצה של $A \times B$ כך שלכל $a \in A$ יש $b \in B$ יחיד כך שמתקיים $(a, b) \in f$. במקרה כזה נסמן גם $b = f(a)$, כמקובל.

הקבוצה $\{(x, \sin x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, למשל, מתארת את הפונקציה: $\sin{:}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

אותה קבוצה מתארת גם את הפונקציה: $\sin{:}\mathbb{R} \to [-1, 1]$

הקבוצה $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \land xy = 1\}$ אינה מתארת פונקציה מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ כי עבור $x = 0$ אין y מתאים. היא **כן** מתארת פונקציה מ-$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ל-$\mathbb{R}$.

גם הקבוצה $\{(x, y) \mid x \in (0, \infty), \quad y \in \mathbb{R} \land x = y^2\}$ אינה מתארת פונקציה, כי לכל x יש שני ערכי y אפשריים.

ולבסוף אם

A - קבוצת תתי הקבוצות בגודל 2 של $\mathbb{R}$

B - קבוצת הזוגות הסדורים $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

אז הקבוצה $\{(\{x, y\}, (x, y)) \mid \{x, y\} \in A\}$ אינה מתארת פונקציה מ A ל B, שכן לאותו

ערך בתחום $\{x,y\}=\{y,x\}$ מתאימים שני ערכים שונים בטווח $(x,y)\neq(y,x)$.

שתי פונקציות ייחשבו **שוות** כאשר הן שוות כקבוצות של זוגות סדורים. קל לראות כי התנאי הוא שיש להן אותו תחום ואותה פעולה.

שתי הפונקציות הבאות למשל,

$\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, (**באופן פורמלי:** $\{(x,\sin x)\mid x\in\mathbb{R}\}$)

$\sin:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, (**באופן פורמלי:** $\{(x,\sin x)\mid x\in(0,\infty)\}$)

אינן שוות כי יש להן תחום שונה.

עם זאת קיים ביניהן קשר ברור - הפונקציה השניה מתקבלת מצמצום הפונקציה הראשונה לתחום $(0,\infty)$.

באופן כללי אם f פונקציה מ-A ל-B, $D\subseteq A$, אזי הפונקציה $f\cap(D\times B)$ מ-D ל-B קרויה **הצמצום** של f ל-D ומסומנת $f\mid_D$.

קבוצת כל הפונקציות מ-A ל-B תסומן B^A.

4.2 הרכבת פונקציות

אם f פונקציה מ-A ל-B ו-g פונקציה מ-B ל-C, ניתן להגדיר את ההרכבה של g על f באופן הבא:

$$\begin{aligned} g \circ f:\ & A \to C \\ & x \to g(f(x)) \end{aligned}$$

פונקציית הזהות

כשם ש-0 הוא איבר ניטרלי ביחס לחיבור ו-1 ניטרלי ביחס לכפל, גם עבור פעולת ההרכבה יש איבר ניטרלי וליתר דיוק איברים ניטרליים. זוהי **פונקציית הזהות** שאינה משנה את הערכים המוכנסים אליה, אלא שלכל קבוצה A פונקציית זהות משלה $i_A\colon A \to A$ המוגדרת באופן פורמלי כעת: $i_A = \{(x,x) \mid x \in A\}$.

טענה 4.1: אם $f\colon A \to B$, אזי

$$i_B \circ f = f$$
$$f \circ i_A = f$$

במקרה הראשון, פונקציית הזהות פועלת על הטווח של f, ולכן תהיה זאת פונקציית הזהות של B.

במקרה השני, פונקציית הזהות פועלת על התחום של f, ולכן תהיה זאת פונקציית הזהות של A.

הוכחה: נבדוק כי $i_B \circ f = f$.

ובכן, לשתי הפונקציות תחום זהה A ופעולה זהה, שכן לכל $a \in A$ מתקיים

$$(i_B \circ f)(a) = i_B(f(a)) = f(a)$$

נראה גם כי $f \circ i_A = f$.

תחום שתי הפונקציות זהה: גם כאן זהו A.

פעולת הפונקציות זהה אף היא: לכל $a \in A$ מתקיים

$$(f \circ i_A)(a) = f(i_A(a)) = f(a)$$

אסוציאטיביות

טענה 4.2: אם $f: C \to D$, $g: B \to C$ ו-$h: A \to B$, אזי מתקיים

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

(וכיון שכך, נוכל להשמיט את הסוגריים כליל ולכתוב פשוט $f \circ g \circ h$.)

אכן, התחום הוא זהה, A. הפעולה אף היא זהה: לכל $a \in A$

$$((f \circ g) \circ h)(a) = (f \circ g)(h(a)) = f(g(h(a))) = f((g \circ h)(a)) = (f \circ (g \circ h))(a)$$

קומוטטיביות

בדרך כלל, לא יתקיים $f \circ g = g \circ f$.

ראשית, כאשר קיימת ההרכבה בכיוון אחד, לא תמיד אפשרית ההרכבה בכיוון השני.

שנית, גם כאשר ההרכבה בשני הכיוונים אפשרית, כלומר כאשר

$$f: A \to B$$
$$g: B \to A$$

אזי

$$f \circ g: B \to B$$
$$g \circ f: A \to A$$

ואם A ו-B אינן זהות, אזי הפונקציות בוודאי שאינן זהות. לבסוף, אפילו כאשר $A = B$, לא יהיה בדרך כלל שוויון. למשל, אם:

$$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x + 1$$
$$g(x) = 3x$$

אזי נקבל

$$f(g(x)) = 3x + 1$$
$$g(f(x)) = 3x + 3$$

ועדיין ההרכבות אינן זהות.

4.3 חד חד ערכיות ועל

אם f פונקציה מ-A ל-B, הרי לכל $a \in A$ יש בדיוק $b \in B$ אחד כך ש-$b = f(a)$. לענין מיוח
זוכות פונקציות המקיימות קשר כזה גם בכיוון ההפוך, כלומר שלכל $b \in B$ יש בדיוק $a \in A$
אחד כך ש-$b = f(a)$. תכונה זאת מתקבלת מצירוף שתי התכונות הבאות:

f תקרא **על** (B) אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ המקיים $f(a) = b$ (על אף שתכונה זאת אינ
תלויה ב-f בלבד, אלא גם בטווח המסוים B אליו מתייחסים, נוותר בדרך כלל על ציונו אם ברור
שאליו הכוונה מדרך רישום הפונקציה).

f תקרא **חד חד ערכית** (חח"ע) אם לכל $b \in B$ קיים לכל היותר $a \in A$ אחד כך ש-$b = f(a)$.
בבדיקת חח"ע נשתמש בדרך כלל בניסוח השקול הבא:

$$f \text{ חח"ע} \Leftrightarrow \text{לכל } a_1, a_2 \in A: \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

דוגמאות

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to x^2 \end{aligned}$$

הפונקציה אינה על. למשל, $x^2 = -4$ לא מתקיים עבור שום x.

הפונקציה גם אינה חד חד ערכית, כי יש למשל שני ערכים $x \in \mathbb{R}$ המקיימים $x^2 = 4$.

$$\begin{aligned} g:\ & (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ & x \to x^2 \end{aligned}$$

$f((-\infty,0]) \subseteq R$

שוב הפונקציה אינה על, אבל הפעם זו פונקציה חד חד ערכית.

$$\begin{aligned} h:\ & \mathbb{R} \to [0,\infty) \\ & x \to x^2 \end{aligned}$$

פונקציה זו היא על, אך אינה חד חד ערכית.

$$\begin{aligned} j:\ & (0,\infty) \to (0,\infty) \\ & x \to x^2 \end{aligned}$$

ופונקציה זו היא גם על וגם חד חד ערכית.

טענה 4.3: אם $f\colon A \to B$, $g\colon B \to A$ ומתקיים $g \circ f = i_A$, אזי f היא חד חד ערכית ו-g היא על.

הוכחה:

(1) נראה כי f היא חד חד ערכית. נניח כי $a_1, a_2 \in A$ ומתקיים $f(a_1) = f(a_2)$.
יש להראות כי אז $a_1 = a_2$.
נפעיל g על שני אגפי השוויון ונקבל

$$g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \;\Rightarrow\; (g\circ f)(a_1) = (g\circ f)(a_2) \;\Rightarrow\; i_A(a_1) = i_A(a_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2$$

כדרוש.

(2) נראה כי g היא על. יש להראות כי בהינתן $a \in A$ ניתן למצוא $b \in B$ כך ש-$a = g(b)$.
ננסה להשתמש ב-$f(a)$ בתפקיד של b ואכן

$$g(f(a)) = (g \circ f)(a) = i_A(a) = a$$

כדרוש.

משפט 4.4: נתונה פונקציה $f\colon A \to B$ כאשר $A \neq \emptyset$.

א. f על $\Leftrightarrow$ f **הפיכה מימין**, כלומר קיימת פונקציה $g\colon B \to A$ כך ש-$f \circ g = i_B$.

ב. f חד חד ערכית $\Leftrightarrow$ f **הפיכה משמאל**, כלומר קיימת פונקציה $g\colon B \to A$ כך ש-$g \circ f = i_A$.

ג. f על וחד חד ערכית $\Leftrightarrow$ f **הפיכה**, כלומר קיימת פונקציה $g\colon B \to A$ כך ש-$f \circ g = i_B$ וגם $g \circ f = i_A$.

הוכחה:

א. הכיוון $\Rightarrow$ נובע מטענה 4.3. נוכיח את הכיוון $\Leftarrow$.
מכיון ש-f היא על, יש לכל $b \in B$ איזה $a_b \in A$ כך ש $f(a_b) = b$. (אם יש כמה כאלה, נבחר אחד מהם באופן שרירותי). כעת נגדיר

$$\begin{aligned} g:\;\; & B \to A \\ & b \to a_b \end{aligned}$$

ונבדוק כי אכן מתקיים $f \circ g = i_B$.

לשתי הפונקציות תחום B ובאשר לפעולת הפונקציות הרי לכל $b \in B$:

$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a_b) = b = i_B(b)$$

ב. $\Rightarrow$ נובע מטענה 4.3. נוכיח כעת את $\Leftarrow$.

נבחר $a_0 \in A$ (יש כזה שכן $A \neq \emptyset$) וכעת נגדיר:

$$g: \; B \to A$$
$$b \to \begin{cases} a & b = f(a) \\ a_0 & \forall a \in A : b \neq f(a) \end{cases}$$

מכיון ש-f חד חד ערכית, לא יתכן לכל b יותר מ-a אחד כך ש-$b = f(a)$, ולכן g מוגדרת היטב. נבדוק שאכן $g \circ f = i_A$.

לשתי הפונקציות תחום A ובאשר לפעולת הפונקציות, הרי לכל $a \in A$:

$$(g \circ f)(a) = (g(f(a)) = a = i_A(a)$$

ג. $\Rightarrow$ נובע שוב מטענה 4.3. נוכיח כעת את $\Leftarrow$.

לפי סעיף א', מכיון ש-f היא על, קיימת g_1 מ-B ל-A המקיימת $f \circ g_1 = i_B$.

לפי סעיף ב', מכיון ש-f היא חד חד ערכית, קיימת g_2 מ-B ל-A המקיימת $g_2 \circ f = i_A$.

נותר להראות כי $g_1 = g_2$. ובכן

$$g_1 = i_A \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ i_B = g_2$$

החשבון האחרון מראה גם כי אם הפונקציה $f: A \to B$ הפיכה, אזי קיימת פונקציה אחת ויחידה g ההפוכה לה, שתסומן f^{-1}.

תכונות של פונקציות הפיכות

אבחנה 4.5:

א. פונקצית הזהות היא הפיכה.

ב. אם f הפיכה, אזי f^{-1} הפיכה ומתקיים $(f^{-1})^{-1} = f$.

ג. אם f ו-g הפיכות וההרכבה $f \circ g$ אפשרית, אזי $f \circ g$ הפיכה ומתקיים

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

4.4 תרגילים

1. חשב את $f^2 = f \circ f$ ואת $f^3 = f \circ f \circ f$ כאשר:

א. $$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \to n+1$$

ב. $$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad n \to \begin{cases} n & \text{מתחלק ב-3 } n \\ n-1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ג. $$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \to -\frac{1}{x}$$

ד. $$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad x \to 1-\frac{1}{x}$$

ה. $$f\colon P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R}), \quad A \to A \cup \mathbb{N}$$

ו. $$f\colon P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R}), \quad A \to A \Delta \mathbb{N}$$

פתרון:

א.

$$f^2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \to n+2 \qquad f^3\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \to n+3$$

ב.

$$f^2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad n \to \begin{cases} n & n \equiv 0 \pmod 3 \\ n-1 & n \equiv 1 \pmod 3 \\ n-2 & n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

ומכיון ש-$f^2(n)$ מתחלק ב-3 לכל n הרי $f^3 = f^2$.

ג. $f^2 = i_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ $\quad f^3 = f$.

ד.

$$f^2 \colon \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad x \to \frac{1}{1-x} \qquad f^3 = i_{\mathbb{R} \setminus \{0,1\}}$$

ה. $f^3 = f^2 = f$

ו. $f^2 = i_{P(\mathbb{R})}$ $\quad f^3 = f$.

2. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבע האם היא חח"ע והאם היא על:

א. $$f\colon\ (0,\infty)\to(0,1) \qquad x\to\frac{1}{1+x}$$

ב. $$g\colon\ (0,\infty)\to(0,\infty) \qquad x\to x+\frac{1}{x}$$

ג. $$h\colon\ (0,\infty)\to(-\infty,\infty) \qquad x\to x-\frac{1}{x}$$

ד. $$F\colon\ P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R}) \qquad A\to A\cap\mathbb{N}$$

ה. $$G\colon\ P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R}) \qquad A\to A\cup\mathbb{N}$$

ו. $$H\colon\ P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R}) \qquad A\to A\Delta\mathbb{N}$$

ז. $$J\colon\ P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{N}) \qquad A\to A\cap\mathbb{N}$$

ח. $\varphi\colon\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $\quad n\to$ סכום הספרות של n

ט. $$\psi\colon\ (0,\infty)\times(0,\infty)\to(0,\infty)\times(0,\infty) \qquad (x,y)\to(x+y,2y)$$

פתרון:

א. f חח"ע ועל

$$f^{-1}:\ (0,1)\to(0,\infty)$$

$$y\to\frac{1-y}{y}$$

ב. g לא חח"ע, למשל $g(2)=g\left(\frac{1}{2}\right)$.

g לא על, כי לכל $x>0$ מתקיים

$$x+\frac{1}{x}\geq\max\left\{x,\frac{1}{x}\right\}\geq 1$$

(למעשה $x+\frac{1}{x}\geq 2$), ולכן אין $x\in(0,\infty)$ כך ש- $g(x)=\frac{1}{2}$, למשל.

ג. h חח"ע ועל

$$h^{-1}: \ (-\infty,\infty) \to (0,\infty)$$

$$y \to \frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$$

ד. F לא חח"ע: למשל

$$F(\{2,3,\pi\}) = \{2,3\} = F(\{2,3,\sqrt{5},-4\})$$

F לא על: למשל אין $A \in P(\mathbb{R})$ כך ש-$F(A) = \mathbb{R}$ שהרי לכל A מתקיים

$$F(A) = A \cap \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$$

ה. G לא חח"ע: למשל

$$G(\{2,3,\pi\}) = \mathbb{N} \cup \{\pi\} = G(\{3,4,7,\pi\})$$

G לא על: למשל אין $A \in P(\mathbb{R})$ כך ש-$G(A) = \emptyset$ שהרי לכל A מתקיים

$$G(A) = A \cup \mathbb{N} \supseteq \mathbb{N}$$

ו. H חח"ע ועל: $H^{-1} = H$ שכן לכל $A \in P(\mathbb{R})$ מתקיים

$$(A \Delta \mathbb{N}) \Delta \mathbb{N} = A \Delta (\mathbb{N} \Delta \mathbb{N}) = A \Delta \emptyset = A$$

ז. J לא חח"ע - כמו F.

J על: לכל $B \in P(\mathbb{N})$ יש $A \in P(\mathbb{R})$ (למשל $A = B \cup \{\pi\}$ וכמובן גם $A = B$)
כך ש-$J(A) = A \cap \mathbb{N} = B$.

ח. φ לא חח"ע: למשל $\varphi(12) = 3 = \varphi(21)$

φ על, כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\varphi(\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ ספרות}}) = n$$

ט. ψ חח"ע, כי אם $(x_1+y_1,2y_1)=(x_2+y_2,2y_2)$, אזי $2y_1=2y_2$ ומכאן $y_1=y_2$ ואז, מכיון ש-$x_1+y_1=x_2+y_2$ הרי שגם $x_1=x_2$ ולפיכך $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.

ψ לא על: למשל אין $x,y>0$ כך שמתקיים

$$\psi(x,y)=(x+y,2y)=(5,100)$$

כי אז היה מתקיים

$$10=2\cdot5=2(x+y)>2y=100$$

3. הוכח או הפרך כי לכל $f\colon B\to C$, $g\colon A\to B$ מתקיים:

א. $[f$ חח"ע $\wedge\ g$ חח"ע$]\Leftarrow f\circ g$ חח"ע

ב. $f\circ g$ חח"ע $\Leftarrow g$ חח"ע

ג. $f\circ g$ חח"ע $\Leftarrow f$ חח"ע

ד. $[f\circ g$ חח"ע $\wedge\ g$ על$]\Leftarrow f$ חח"ע

ה. $[f$ על $\wedge\ g$ על$]\Leftarrow f\circ g$ על

ו. $f\circ g$ על $\Leftarrow f$ על

ז. $f\circ g$ על $\Leftarrow g$ על

ח. $[f\circ g$ על $\wedge\ f$ חח"ע$]\Leftarrow g$ על

פתרון:

א. אם f,g חח"ע, אזי גם $f\circ g$ חח"ע, שכן אם $a_1,a_2\in A$ ומתקיים

$$(f\circ g)(a_1)=(f\circ g)(a_2)$$

כלומר $f(g(a_1))=f(g(a_2))$, אזי מכיון ש-f חח"ע, $g(a_1)=g(a_2)$ ואז, מכיון שגם g חח"ע, $a_1=a_2$ כנדרש.

ב. אם $f\circ g$ חח"ע אזי g חח"ע, שכן אם $a_1,a_2\in A$ ומתקיים $g(a_1)=g(a_2)$ אזי גם $f(g(a_1))=f(g(a_2))$ כלומר $(f\circ g)(a_1)=(f\circ g)(a_2)$ ואז מכיון ש-$f\circ g$ חח"ע, הרי $a_1=a_2$.

פתרון נוסף: אם $f\circ g$ חח"ע, הרי היא הפיכה משמאל כלומר קיימת פונקציה $h\colon C\to A$ כך ש-$h\circ(f\circ g)=i_A$ ואז $(h\circ f)\circ g=i_A$ וכך g הפיכה משמאל, כלומר חח"ע.

ג. הטענה אינה נכונה, כפי שניתן לראות למשל בדוגמה הבאה: