חילוק פולינומים

מתי נוכל לבצע חילוק בין פולינומים?

א. כאשר יש מנת פולינומים
ב. כאשר דרגת הפולינום במונה גדולה או שווה לדרגת הפולינום במכנה (המושג דרגה יוסבר מיד)

- פולינומים מסומנים בעיקר ע"י $P(x)$
- מהי דרגת הפולינום?

פולינום מורכב מסכום של רכיבים, כל רכיב הינו x בעל חזקה מסוימת, למשל, $3x,\ x,\ 4x^2,\ 7,\ 5x^6$ וכו'. דרגת הפולינום מוגדרת להיות החזקה הגבוהה ביותר מבין כל החזקות שמופיעות כחזקות של המשתנה.

דוגמא, דרגת הפולינום $P(x)=3x^3-4x+6-4x^5$ היא 5 מאחר ש- 5 הינה החזקה הגבוהה ביותר מבין חזקות הפולינום המוצג, שהרי החזקות הקיימות הינן (משמאל לימין) 3, 1, 0, ו-5 (נזכור כי כאשר ישנו מספר "כאילו" ללא x הוא בעצם המספר כפול x בחזקת 0, שהרי x^0 שווה ל-1, משמעות הדבר היא שכאשר כתוב בפולינום שבדוגמא 6 אזי בעצם מדובר ב $6=6\cdot 1=6\cdot x^0$.

דוגמא נוספת, דרגת הפולינום $P(x)=4x^3+8x^2+3x-9$ היא 3.

כעת, נראה את תהליך "חילוק פולומים" לפי שלבים:

נבצע את החילוק הבא $(x^3-1):(x+2)$ כמובן שניתן לכתוב את הביטוי גם כך, $\frac{x^3-1}{x+2}$

על מנת לבצע חילוק פולינומים הנקרא גם חילוק ארוך, נכתוב את התרגיל באופן הבא $\overline{x^3-1}|\ x+2$ כעת, נשאל שאלה: באיזה ביטוי נצטרך להכפיל את ה x בעל החזקה הגבוהה ביותר הנמצא במכנה – במקרה שלנו x, על מנת שנקבל את ה x בעל החזקה הגבוהה ביותר במונה – במקרה שלנו x^3. התשובה היא שנצטרך להכפיל ב x^2 מאחר שאם נכפיל את x ב x^2 אכן נקבל x^3. נכתוב את התשובה שלנו מעל לסימון החילוק הארוך

$$\begin{array}{l} x^2 \\ \overline{x^3-1}|\ x+2 \end{array}$$

כעת, נבצע הכפלה של x^2 במכנה $x+2$ ואת התוצאה נרשום מתחת ל x^3-1.

$$\begin{array}{l} x^2 \\ \overline{x^3\ -\ 1}|\ x+2 \\ x^3+2x^2 \end{array}$$

בשלב זה נחסר בין x^3-1 לביטוי x^3+2x^2

$$x^2$$
$$\overline{x^3 \ - \ 1} \,\big|\, x+2$$
$$-$$
$$\underline{x^3+2x^2}$$
$$0-2x^2-1$$

נזכיר כי את החיסור נעשה באופן הבא
$$x^3 \ - \ 1-\left(x^3+2x^2\right)=x^3 \ - \ 1-x^3-2x^2=-2x^2-1$$

עבור תוצאת החיסור, $-2x^2-1$, נרצה לבצע את אותו תהליך, אך עלינו לוודא כי התנאים הראשונים עדיין מתקיימים, לשם כך, נשאל האם דרגת הפולינום שהתקבל, $-2x^2-1$, גדולה או שווה לדרגת הפולינום שהיה במכנה $x+2$, כמובן שהתשובה חיובית - דרגת הפולינום $-2x^2-1$ היא 2 והיא גדולה מדרגת הפולינום במכנה $x+2$ ולכן מקיימת את תנאי ב׳.

על מנת לחזור על התהליך, נשאל שוב באיזה ביטוי נכפיל את x על מנת לקבל את $-2x^2$, התשובה היא $-2x$, כעת נבצע את ההכפלה ונכתוב את הביטוי $-2x$ מעל לסימון של החילוק

$$x^2-2x$$
$$\overline{x^3 \ - \ 1} \,\big|\, x+2$$
$$-$$
$$\underline{x^3+2x^2}$$
$$0 \ \ -2x^2 \ \ -1$$
$$-$$
$$\underline{-2x^2-4x}$$
$$0+4x-1$$

נזכיר כי את החיסור נעשה באופן הבא
$$-2x^2-1-\left(-2x^2-4x\right)=-2x^2-1+2x^2+4x=4x-1.$$

על מנת להמשיך את התהליך עלינו לבדוק שוב האם הביטוי שקבלנו, $4x-1$ עומד בתנאים הראשונים , ז״א האם דרגת הפולינום שהתקבל, $4x-1$, גדולה או שווה לדרגת הפולינום שהיה במכנה $x+2$.

על מנת לחזור על התהליך, נשאל שוב באיזה ביטוי נכפיל את x על מנת לקבל את $4x$, התשובה היא 4, כעת נבצע את ההכפלה ונכתוב את הביטוי 4 מעל לסימון של החילוק.

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{1}{l}{x^2-2x+4} & \\
\cline{1-1}
x^3 \quad - \quad 1 & x+2 \\
- \quad & \\
x^3+2x^2 & \\
\hline
0 \quad -2x^2 \quad -1 & \\
- \quad & \\
-2x^2-4x & \\
\hline
0+4x-1 & \\
- \quad & \\
4x+8 & \\
\hline
0-9 &
\end{array}
$$

מאחר ש -9 הינו פולינום מדרגה 0 הרי שתהליך חילוק הפולינומים הסתיים, מאחר שאינו עומד בתנאי ב'.
מה קבלנו?

התחלנו ממנת הפולינומים $\frac{x^3-1}{x+2}$ והגענו למסקנה כי ביטוי זה שווה לביטוי:

$x^2-2x+4+\frac{-9}{x+2}$.

הביטוי שנשאר כתוצאה מההפרש האחרון הינו השארית, -9, הביטוי שרשום מעל לסימון החילוק הוא בעצם השלם (בדיוק כמו שמחלקים בין מספרים, למשל $7:2$ שווה ל 3 שלמים עם שארית 1, את התוצאה רושמים $3\frac{1}{2}$).

כיצד הביטוי $x^2-2x+4+\frac{-9}{x+2}$ שווה לביטוי $\frac{x^3-1}{x+2}$?

נסתכל על הביטוי $x^2-2x+4+\frac{-9}{x+2}$ ונבצע מכנה משותף:

$$x^2-2x+4+\frac{-9}{x+2}=\frac{\left(x^2-2x+4\right)\left(x+2\right)-9}{x+2}=\frac{\overbrace{x^3+2x^2-2x^2-4x+4x+8}^{\left(x^2-2x+4\right)\left(x+2\right)}-9}{x+2}$$
$$=\frac{x^3-1}{x+2}$$

האם תמיד יש שארית?
התשובה כמובן שלא, לא תמיד ישנה שארית וזאת בדיוק כמו חילוק בין מספרים, למשל כאשר מחלקים 7 ב2 ישנה שארית, אך כאשר נחלק 9 ב3 לא נקבל שארית, כך גם בחילוק פולינומים: למשל נתבונן במנה הבאה $\frac{x^2-1}{x+1}$, אנו יודעים כי ניתן להשתמש בנוסחאות

הכפל המקוצר ולצמצם את הביטויים : $\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=x-1$, נראה זאת ע״י חילוק פולינומים, ראשית נרשום את התרגיל תוך שימוש בסימון של חילוק ארוך :

$$\overline{x^2-1}\,\big|\; x+1$$

נתחיל בביצוע התהליך כמו שראינו :

$$\begin{array}{l} x-1 \\ \overline{x^2\;-1}\,\big|\;x+1 \\ - \\ \underline{\;x^2+x\;} \\ 0-x-1 \\ - \\ \underline{\;-x-1\;} \\ \quad 0 \end{array}$$

נוכל לראות כי השארית היא 0 לכן נותרו רק שלמים $x-1$. משמעות התוצאה היא שמתקיים $\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$, אם כך ע״י העברת אגפים מתקבל כי $x^2-1=(x-1)(x+1)$

כתוצאה מכך, נוכל לומר כי נוכל להחליף את המשוואה $x^2-1=0$ במשוואה $(x-1)(x+1)=0$, במקרה זה המשוואה מאוד פשוטה, אך לפעמים כאשר המשוואה הינה פולינומיאלית בעלת דרגה 3 או 4 אזי החלפת המשוואה במכפלת שני ביטויים עדיפה בהרבה.

נשאלת השאלה, כיצד נדע במה לחלק משוואה קשה על מנת לקבל שארית של 0.

ברור כי על מנת לקבל שארית 0 נצטרך לחלק את המשוואה ב $x-x_1$ כאשר x_1 הינו פתרון של המשוואה הקשה - זאת על מנת לקבל מכפלה של שני גורמים השווים ל-0 ואז יהיה קל לפתור את המשוואה שכן נשווה כל ביטוי במכפלה ל-0 - $(A)(B)=0 \to A=0 \;\; or \;\; B=0$, אם כך, מתעוררת שאלה נוספת, כיצד נמצא פתרון?

התשובה היא סוג של ניחוש,

דוגמא, פתור את המשוואה הבאה : $12x^3-27x^2-30x+9=0$

נוכל לנחש (ע״י ניסיונות) כי אחד הפתרונות הינו 1-. על כן, נוכל להיעזר בחילוק פולינומים. נחלק את הפולינום $12x^3-27x^2-30x+9$ ב $x-(-1)=x+1$ ונקבל :

$$\begin{array}{l} 12x^2-39x+9 \\ \overline{12x^3-27x^2-30x+9}\,\big|\,x+1 \\ - \\ \underline{12x^3+12x^2} \\ 0-39x^2-30x+9 \\ - \\ \underline{-39x^2-39x} \\ 0+9x+9 \\ - \\ \underline{9x+9} \\ 0 \end{array}$$

אם כך קבלנו כי $12x^3-27x^2-30x+9=\left(12x^2-39x+9\right)\left(x+1\right)$ כעת נעדיף להשוות ל-0 את $\left(12x^2-39x+9\right)\left(x+1\right)$ במקום התרגיל המקורי $12x^3-27x^2-30x+9$.

$\left(12x^2-39x+9\right)\left(x+1\right)=0$

$A: x+1=0 \to x_1=-1$

$B: 12x^2-39x+9 \quad \to \quad x_2=\frac{1}{4} \qquad x_3=3$

נשארה לנו בעיה אחת, בעיית הניחוש, כיצד עלינו לנחש או להמר על ניחוש נכון?
ישנו משפט שעשוי לעזור בעניין ☺

נניח כי לפולינום ישנו שורש, נסמנו $\frac{m}{n}$ כך שמתקיים m שהוא ערך המונה, מחלק את המספר החופשי ו n המכנה מחלק את המקדם של המשתנה בעל החזקה הגבוהה ביותר של הפולינום אזי האפשרויות ניחוש שלנו הן כל האופציות האפשריות של $\frac{m}{n}$.

דוגמא: פתור את המשוואה $2x^3+x^2-2x-1=0$.

ראשית נמצא פתרון ע"י ניחוש לפי המשפט, נחפש אפשרויות לשורשים מהצורה $\frac{m}{n}$
כאשר m מחלק את המספר החופשי ז"א 1- ו n מחלק את המקדם של המשתנה בעל החזקה הגבוהה ביותר של הפולינום ז"א 2:

על כן האופציות הן: $n=\pm1,\pm2$, $m=\pm1$ ולכן האפשרויות עבור הפתרון $\frac{\pm1}{\pm2}$, $\frac{\pm1}{\pm1}$

לאחר הצבה נוכל לראות כי 1, 1- ו $\frac{-1}{2}$ הם הפתרונות וכאמור, מספיק למצוא רק שורש אחד ואז לבצע חילוק פולינומים.

דוגמא נוספת: פתור את המשוואה הבאה $2x^3+6x^2-8x-24=0$
גם בדוגמא זו נרצה למצוא ניחוש ונעשה זאת לפי המשפט, נחפש אפשרויות לשורשים מהצורה $\frac{m}{n}$ כאשר m מחלק את המספר החופשי ז"א24- ו n מחלק את המקדם של המשתנה בעל החזקה הגבוהה ביותר של הפולינום ז"א 2:

על כן האופציות הן: $n=\pm1,\pm2$, $m=\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm24$ ולכן האפשרויות

עבור הפתרון $\frac{\pm24}{\pm2},\frac{\pm24}{\pm1},\frac{\pm8}{\pm2},\frac{\pm8}{\pm1},\frac{\pm6}{\pm2},\frac{\pm6}{\pm1},\frac{\pm4}{\pm2},\frac{\pm4}{\pm1},\frac{\pm3}{\pm2},\frac{\pm3}{\pm1},\frac{\pm2}{\pm2},\frac{\pm2}{\pm1},\frac{\pm1}{\pm2},\frac{\pm1}{\pm1}$

נוכל לראות כי ישנן אפשרויות שחוזרות על עצמן ובנוסף, נוכל לראות כי ישנן אפשרויות רבות, אך כמו שאמרנו, מספיק לגלות רק פתרון אחד ואז נבצע חילוק פולינומים. כאשר נתחיל להציב את הפתרונות האופציונליים נוכל לראות כי האפשרות $x=2$ גורמת לפתרון המשוואה ולכן נבצע חילוק פולינומים בביטוי $x-2$ כך נהיה בטוחים כי נקבל שארית 0 וגם נוכל לפתור את המשוואה ביתר קלות שכן נהפוך את המשוואה מקשרים של חיבור וחיסור של ארבעה איברים לקשרים של מכפלה בין שני ביטויים.

$$
\begin{array}{l}
2x^2+10x+12 \\
\overline{2x^3+6x^2-8x-24}\,\big|\; x-2 \\
- \\
\underline{2x^3-4x^2} \\
0+10x^2-8x-24 \\
- \\
\underline{10x^2-20x} \\
0+12x-24 \\
- \\
\underline{\quad 12x-24} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

כעת, נוכל לומר כי במקום לפתור את המשוואה $2x^3+6x^2-8x-24=0$ אנו יכולים לפתור את המשוואה $\left(2x^2+10x+12\right)\left(x-2\right)=0$, ברור כי זאת משוואה שאנו יודעים לפתור, מאחר שהיא מורכבת ממכפלת שני איברים. נשווה את הביטוי הראשון ל-0 ולאחר מכן נשווה את הביטוי השני:

$$
\begin{aligned}
&\left(2x^2+10x+12\right)\left(x-2\right)=0 \\
&A: 2x^2+10x+12=0 \;\rightarrow\; x_1=-3 \quad x_2=-2 \\
&B: x-2=0 \;\rightarrow\; x_3=2
\end{aligned}
$$

תרגיל משיעורי בית

$$x^4+x^3+2x^2+4x-8=0$$

גם בדוגמא זו נרצה למצוא ניחוש ונעשה זאת לפי המשפט, נחפש אפשרויות לשורשים מהצורה $\frac{m}{n}$ כאשר m מחלק את המספר החופשי ז"א 8- ו n מחלק את המקדם של המשתנה בעל החזקה הגבוהה ביותר של הפולינום ז"א 1:

על כן האופציות הן: $n=\pm 1$, $m=\pm 1,\pm 2,\pm 4,\pm 8$ ולכן האפשרויות עבור הפתרון $\frac{\pm 1}{\pm 1},\frac{\pm 2}{\pm 1},\frac{\pm 4}{\pm 1},\frac{\pm 8}{\pm 1}$ ננסה לגלות פתרון מתאים כאשר נתחיל להציב את הפתרונות האופציונליים נוכל לראות כי האפשרות $x=-2$ ו- $x=1$ מביאות את המשוואה לפסוק אמת. אם כך, נוכל לחלק את המשוואה ב $(x+2)(x-1)$ שזה בעצם הביטוי $(x+2)(x-1)=x^2+x-2$ ולכן נבצע חילוק פולינומים בביטוי x^2+x-2 כך נהיה בטוחים כי נקבל שארית 0 וגם נוכל לפתור את המשוואה ביתר קלות שכן נהפוך את המשוואה מקשרים של חיבור וחיסור של ארבעה איברים לקשרים של מכפלה בין שני ביטויים.

$$
\begin{array}{l}
x^2+4 \\
\overline{x^4+x^3+2x^2+4x-8}\,\big|\,x^2+x-2 \\
- \\
\underline{x^4+x^3-2x^2} \\
0+0+4x^2+4x-8 \\
- \\
\underline{\qquad 4x^2+4x-8} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

על כן נקבל כי המשוואה $x^4+x^3+2x^2+4x-8=0$ זהה למשוואה $\left(x^2+4\right)\left(x^2+x-2\right)=0$. לאחר שנפתור נוכל לראות כי הפתרונות היחידים (הממשיים) הם $x=-2$ ו- $x=1$.