

מבוא לאלגברה לינארית, מועד ב', תש"ף

- מרצה: תמר בר-און.
מתרגלת: אלכסנדרה סימנובסקי.
משך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט.
עליכם לענות על כל השאלות. בכל שאלה יש להראות את החישובים הנצרכים ודרך הפתרון.
1. נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} ax + ay + az = 2a \\ x + ay + az = a - 1 \\ (1 - a)x + (a + 3)z = a^2 - a - 10 \end{cases}$$

- (א) (15 נקודות) קבעו לאילו ערכי a יש למערכת: פתרון יחיד, אין פתרון, אינסוף פתרונות.
- (ב) (5 נקודות) במקרה של פתרון יחיד, מצאו את הפתרון היחיד של המערכת, כביטוי עם a .

2. יהיו $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(א) חשבו את A^{-1} .

(ב) מצאו מטריצה $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ כך $A^{-1}C = B$.

3. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(א) (10 נקודות) חשבו את הפולינום האופייני והערכים העצמיים של A .

(ב) (10 נקודות) קבעו האם A לכסינה. במידה וכן, מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $P^{-1}AP = D$.

4. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) (15 נקודות) מצאו מימד למרחב השורות של A , מרחב העמודות של A , ומרחב האפס של A .

במידה והמימד שונה מאפס, מצאו בסיס למרחב.

(ב) (5 נקודות) קבעו האם $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ שייך למרחב העמודות של A . הוכיחו את קביעתכם.

5. יהי $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(א) מצאו שני וקטורים שונים שמאונכים ל- v , ושני וקטורים שונים שאינם מאונכים ל- v .

(ב) מצאו וקטור ב- $\text{span}(\{v\})$, כלומר מהצורה αv , כך שהנורמה שלו היא 1.

נוסחאות עזר:

1. חישוב דטרמיננטה לפי מינורים: פיתוח לפי שורה i מחושב $|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{i,j} |M_{i,j}|$

2. הזווית θ בין וקטורים u, v מוגדרת ע"י $\cos \theta = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \cdot \|u\|}$ (כאשר $\theta \in [0, \pi]$)

3. הטלה של וקטור v על w (ניתן גם לומר על: $W = \text{span}\{w\}$) הוא $\pi_W(v) = \pi_w(v) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w$