התפלגויות בדידות

התפלגות אחידה (בדידה)

התפלגות של מ"מ X בה כל האיברים בקבוצה סופית
הסתברות שווה, ז"א לכל אחד מ-n האיברים
יש סיכוי ש-

$$P(X=i)=\frac{1}{n}$$

$$i=1,2,\dots,n$$

נסמן $X\sim U[1,n]$

uniform

באופן כללי, $X\sim U[a,b]$ מקבל $\frac{1}{b-a+1}$ בסיכוי שווה כל המס' השלמים בקטע

דוגמאות:

1. הטלת קוביה הוגנת $X\sim U[1,6]$
2. הטלת מטבע הוגן $X\sim U[0,1]$

עץ $=0$
פלי $=1$

התוחלת $E[X]=\frac{n+1}{2}$ (בכללי $\frac{a+b}{2}$)

השונות $V[X]=\frac{n^2-1}{12}$ (בכללי $\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$)

(1)

מבוא לסתברות וסטטיסטיקה - הרצאה 7

התפלגויות בדידות

מפולג או מתפלג

$$X \sim b(p)$$

התפלגות ברנולי

למ״מ X יש התפלגות ברנולי אם הוא מקבל 2 ערכים, 0 או 1 (כישלון או הצלחה בהתאמה)

כאשר:

$$P(X=1)=p$$

$$P(X=0)=q=1-p$$

כדוגמא אפשר לחשוב על זריקת מטבע לא הוגן כך שההסתברות לפלי אינה $\frac{1}{2}$.

טענה: התוחלת בברנולי

$$E[X]=p$$

הוכחה:

$$E[X]=0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)=$$

$$=0\cdot q+1\cdot p=p$$

טענה: השונות בברנולי

$$V[X]=p\cdot q=p(1-p)$$

הוכחה:

$$V[X]=E[X^2]-(E[X])^2=$$

$$=0^2\cdot q+1^2\cdot p-p^2=p(1-p)=p\cdot q$$

$X \sim Bin(n,p)$

התפלגות בינומית

מ"מ X סופר את מספר ההצלחות ב-n ניסויי ברנולי (0 או 1) כאשר ההס' להצלחה בניסוי בודד היא p.

ההס' ל k הצלחות מתוך n: $(k=0,1,\dots,n)$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

טענה:

$$E[X]=n\cdot p$$

הוכחה:

$$E[X]=\sum_{k=0}^{n} k\, P(X=k)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k}p^k\cdot q^{n-k}$$

נגזרת לפי p

$$=p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}\cdot k\,p^{k-1}=p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}\left(p^k\right)'=$$

$$=p\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}p^k\right)'=$$

לפי p

הערה: בחישוב הנכון אפשר להתעלם מהערך ההסתברותי שבו $q=1-p$ לא תלוי ב-p. אלא 2 פרמטרים p,q.

בינום

$$=p\cdot\left[(p+q)^n\right]'=p\cdot n\underbrace{(p+q)}_{=1}{}^{n-1}\cdot 1=p\cdot n$$

ההגיון שבתוחלת הוא שאם בניסוי $p=\frac{1}{4}$ ויש 1000 ניסויים אז סביר כי נצליח ב 250 ניסויים.

טענה:

$$V[X]=n\cdot p\cdot q$$

הוכחה:

(2) * $Bin(n,p) \sim X = X_1 + \dots + X_n$

כך ש: X_i מ"מ ברנולי ב"ת. עם הס' p

$X_i \sim b(p)$

ואני בברנולי כי $V[X_i] = p \cdot q$

$$V[X] = V[X_1 + \dots + X_n] = V[X_1] + \dots + V[X_n] =$$

$$= n \cdot V[X_1] = npq \;//$$

התפלגות גאומטרית

$X \sim Geom(p)$

מ"מ X המתפלג גאומטרית סופר את מספר הניסיונות עד להצלחה הראשונה (כולל ההצלחה הראשונה)

או לחילופין X הוא מספר הניסוי בו מתרחשת ההצלחה הראשונה

$$P(X=k) = q^{k-1} p = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

טענה:

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

הערה: (מגדילים את p התוחלת קטנה, הצלחה ראשונה מוקדמת)

הוכחה:

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} =$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = p \cdot \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = p \cdot \frac{1}{p^2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{p}}$$

לפי q

טור חזקות אפשר להחליף $\sum$ ו $'$ סדר פעולה.