

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן  
מבחן בקורס אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)  
מס': 8821105  
מרצה: פרופ' מיכאל מגרל  
תאריך: 28.08.06 מועד א'  
חומר עזר: רק מחשבון  
משך המבחן: שעתיים

השאלות:

5 מתוך 6

1. מעל קבוצה  $R \times R^*$  נגדיר פעולה  $(a_1, b_1) \bullet (a_2, b_2) = (a_1 + b_1 a_2, b_1 b_2)$ .

הוכח:

א.  $G = (R \times R^*, \bullet)$  חבורה

ב. היא לא אבלית.

ג. קיים מונומורפיזם  $G \rightarrow GL_2(R)$

(כאשר  $GL_2(R)$  חבורת מטריצות ממשיות  $2 \times 2$  הפיכות).

ד. החבורה היא פתירה.

2. נסמן  $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$  ("הקומוטטור") של  $a, b \in G$  בחבורה  $G$ .

נגדיר ת"ח  $G' := \langle \{[a, b] : a, b \in G\} \rangle \leq G$  ("הקומוטנט") הנוצרת ע"י קבוצת

הקומוטטורים. הוכח:

א.  $G' \triangleleft G$ .

ב.  $G/G'$  אבלית.

ג. אם  $f: G \rightarrow Y$  הומומורפיזם וחבורה  $Y$  אבלית אזי  $G' \subseteq \ker f$ .

3. א. הוכח משפט קיילי.

ב. הוכח כי קיימת תת חבורה  $H$  בחבורה  $S_{97}$  כך ש  $H$  איזומורפית לחבורה

$$G = \langle \text{cis}(\frac{17}{25}\pi) \rangle$$

ג. הוכח (לנמק היטב) ש  $S_7 = \langle (1,2,3,4,5,6,7), (5,4) \rangle$ .

ד. תאר תמונות אפימורפיות של החבורות  $D_3, \langle \text{cis}\sqrt{3}\pi \rangle$ .

4. א. כמה יוצרים יש לחבורה  $\Omega_{100} \times Z_{49}$  ?  
 ב. באמצעות משפט Euler מצא 2 ספרות אחרונות של המספר  $36704348073767^{1998} + 2006$ .  
 ג. הוכח שאם  $n = p$  ראשוני אז במונויד  $(Z_n, \bullet)$   $[x]^{-1} = [x]$  אם ורק אם  $[x] = [1]$  או  $[x] = [p-1]$ .  
 ד. הוכח (בעזרת ג'): לכל  $p$  ראשוני מתקיים  $p \mid (p-1)! + 1$ .
5. א. הוכח משפט Sylow 1.  
 ב. הוכח או הפוך: קיימת חבורה לא פתירה עם 77 איברים.  
 ג. הוכח או הפוך: קיימת חבורה פשוטה עם 99 איברים.
6. א. הוכח משפט Burnside על מספר מסלולים.  
 ב. כמה איברים מתחלפים עם התמורה  $a := (2,6,5,3)$  בחבורה  $S_9$  ?  
 ג. נתונה פעולה  $G \times X \rightarrow X$  כאשר  $G := D_7$  ו  $|X| = 19$ .  
 הוכח או הפוך: קיימת נקודת שבת.  
 ד. כמה לוחות  $5 \times 5$  לא שקולים (לגבי הסיבובים) קיימים אם מותר לצבוע ב 3 צבעים קבועים.

בהצלחה ושנה טובה !