

## פונקציות מרוכבות – תרגיל 8

1. פתחו את הפונקציה  $f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$  לטור לורן בטבעת

א.  $|z-2| > 2$       ב.  $0 < |z-2| < 2$

2. נגדיר  $g(z) = \frac{z^3}{e^{1/z^2}}$ .

א. מצאו את טור לורן של  $g(z)$  סביב  $z_0 = 0$ .

ב. חשבו את השארית  $\text{Res}(g, 0)$ .

3. מצאו את החלק העיקרי של טור לורן של הפונקציה  $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2}$  סביב הנקודה  $z_0 = 3i$ .

4. נניח ש- $f(z)$  אנליטית בטבעת מהסוג  $0 < |z| < R$ .

א. האם ייתכן שטור לורן של  $f(z)$  בטבעת זו מכיל רק חזקות  $n \geq 0$ , וטור לורן של  $\frac{1}{f(z)}$  באותה הטבעת מכיל רק חזקות  $n \leq 0$ ? נמקו את תשובתכם.

ב. האם ייתכן שטור לורן של  $f(z)$  בטבעת זו מכיל רק חזקות  $n \geq 0$ , וטור לורן של  $\frac{1}{f(z)}$  באותה הטבעת מכיל  $\infty$  חזקות שליליות? נמקו.

5. נניח כי הפונקציות  $f(z), g(z), r(z), h(z)$  אנליטיות בסביבה מנוקבת של הנקודה  $z_0 \in \mathbb{C}$ .  
 עוד נניח כי ל- $f$  קוטב מסדר 2 ב- $z_0$ , ל- $g$  אפס מסדר 3 ב- $z_0$ , ל- $r$  אפס מסדר 2 ול- $h$  אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות של:

$$\text{א. } \frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$$

$$\text{ב. } \frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$$

בנקודה  $z_0$  ?