

הצעה לפתרון – אלגברה לינארית 1 סמסטר קיץ תשפ"ה מועד ב'

עדי מכנס

1. (8 נקודות לכל סעיף) נתבונן במטריצה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ התלויה בפרמטר $a \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 2 & 3 & a+1 \end{pmatrix}$$

א. לכל ערך של $a \in \mathbb{R}$ קבעו האם למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון.

פתרון:

תחילה נדרג את מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & a+1 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-2a & a-3 & -1 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_3+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_3-(a-1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-(a-1)^2 & a-1 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a^2+2a-1 & a-1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & -a(a-2) & a-1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

נחלק למקרים. אם $a \neq 0$ וגם $a \neq 2$ אזי המטריצה מדורגת, אין שורות סתירה וכל המשתנים חופשיים ולכן יש פתרון יחיד. אם $a = 0$ או $a = 2$ אז השורה השלישית הינה שורת סתירה ולכן אין פתרון.

סה"כ:

- פתרון יחיד: $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$.

- אין פתרון: $a \in \{0,2\}$.

- אינסוף פתרונות: $a \in \emptyset$ (אין ערכים כאלו).

ב. הוכיחו ש:

$$U = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 5v\}$$

הוא תת-מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^3$.

פתרון:

יש שני דרכים לפתור שאלה זו ואציג את שניהם.

דרך א': יהי $v \in \mathbb{R}^3$ אזי:

$$v \in U$$

$$\Leftrightarrow Av = 5v$$

$$\Leftrightarrow Av - 5v = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - 5I)v = 0$$

$$\Leftrightarrow v \in N(A - 5I)$$

כלומר קיבלנו ש $U = N(A - 5I)$ וודאי ש U תת-מרחב, משום שמרחב האפס הוא תת-מרחב.

דרך ב': בעזרת הקריטריון המקוצר.

- תחילה, ברור כי:

$$\vec{0} = A \cdot \vec{0} = 5 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

(שימו לב מדובר כאן בווקטור האפס).

- יהיו $u, v \in U$ וכן $\alpha \in \mathbb{R}$, וצ"ל ש $u + \alpha v \in U$. כעת:

$$A(u + \alpha v) = Au + \alpha Av = 5u + \alpha \cdot 5v = 5(u + \alpha v)$$

ולכן $u + \alpha v \in U$ כמבוקש. משל ■.

ג. עבור $a = 2$ חשבו את $\dim U$.

פתרון:

המטריצה A תהיה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

וכפי שראינו בסעיף ב', צריך למצוא את הממד של מרחב האפס של:

$$A - 5I$$

כלומר צריך למצוא את כמות המשתנים החופשיים של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1-5 & 2 & 2 \\ 0 & 1-5 & 1 \\ 2 & 3 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $\dim U = 1$.

2. נתבונן במרחב הוקטורי $V = \mathbb{R}_2[x]$ ובתתי המרחבים:

$$U = \{p \in V \mid p(1) = 0\}$$

$$W = \{s + tx + (s - t)x^2 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

א. (10 נקודות) מצאו בסיסים לתתי המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^3$.

i. $U \cap W$. הסיקו: $\dim(U \cap W) = 1$.

פתרון:

נעביר את W לצורה אלגברית:

$$a + bx + cx^2 = s(1 + x^2) + t(x - x^2) = \text{span}(1 + x^2, x - x^2)$$

ואז:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & -1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_1, R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c - a + b \end{array}\right)$$

כלומר:

$$W = \{a + bx + cx^2 \in V \mid c + b - a = 0\}$$

כמו כן נעביר את U לצורה אלגברית. אם $p(x) \in U$, אז:

$$p(1) = 0$$

כלומר אם $p(x) = a + bx + cx^2$ אז:

$$a + b + c = 0$$

ולכן מקדמי הפולינומים שנמצאים בחיתוך מקיימים את מערכת המשוואות:

$$\left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2, R_1 - R_2, -R_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

המקדם c הוא משתנה חופשי. נציב בו פרמטר t ונקבל כי:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -c = -t \end{cases}$$

ואז נקבל כי:

$$U \cap W = 0 - tx + tx^2 = t(-x + x^2) = \text{span}(x^2 - x)$$

ובפרט $\dim U \cap W = 1$.

ii. $U + W$. הסיקו: $\dim(U + W) = 3$.

פתרון:

נעביר את U לצורה פרמטרית. כזכור מתת הסעיף הקודם, אפשר לקבל מערכת משוואות על המקדמים של פולינומים ב U ולקבל:

$$(1 \quad 1 \quad 1)$$

כעת b, c משתנים תלויים. נציב $b = t, c = s$ ונקבל כי:

$$U = -t - s + tx + sx^2 = t(x - 1) + s(x^2 - 1) = \text{span}(x - 1, x^2 - 1)$$

כמו כן נזכור כי מתת הסעיף הקודם:

$$W = \text{span}(1 + x^2, x - x^2)$$

וכעת נצמצם לבסיס את איחוד הבסיסים. כלומר:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2, R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1, R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

בעמודה של הוקטור $x - x^2$ אין איבר פותח, ולכן:

$$U + W = \text{span}(x - 1, x^2 - 1, 1 + x^2)$$

ובפרט $\dim(U + W) = 3$.

ב. (8 נקודות) האם קיימת העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$ כך ש $U \cap W = \ker T$, $W = \text{Im } T$?

פתרון:

אנחנו זוכרים שממשפט הדרגה:

$$\dim V = \dim \ker T + \dim \text{Im } T$$

כעת אם נציב את הנתונים, מתקבל כי:

$$3 = 1 + \dim W$$

נותר לבדוק מהו $\dim W$. כזכור:

$$W = \text{span}(1 + x^2, x - x^2)$$

נצמצם לבסיס:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1, R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בשתי העמודות יש איבר פותח ומכאן שאכן $\dim W = 2$. כיצד נבנה העתקה לינארית שתקיים את התכונות המבוקשות? נעבוד לפי ההוכחה של משפט הדרגה. נשלים את הבסיס $U \cap W$ לבסיס ל V . כזכור, הבסיס ל $U \cap W$ הוא:

$$B_{U \cap W} = (x^2 - x)$$

אפשר להשלים לבסיס על ידי:

$$B_V = (x^2 - x, 1, x^2)$$

וכעת נגדיר את ההעתקה T משפט ההגדרה כך: וקטורים בבסיס של החיתוך יישלחו לאפס, בעוד וקטורים שאינם בבסיס של החיתוך יישלחו לווקטורים בבסיס של התמונה. כלומר

$$T(x^2 - x) = 0$$

$$T(1) = 1 + x^2$$

$$T(x^2) = x - x^2$$

נוכיח שמתקיים המבוקש (על אף שזה די מיותר). נתחיל מהתמונה, כזכור ממשפט מההרצאה:

$$\text{Img } T = \text{span}(T(x^2 - x), T(1), T(x^2)) = \text{span}(0, 1 + x^2, x - x^2)$$

$$= \text{span}(1 + x^2, x - x^2)$$

וכמו כן מתקיים ממשפט ההגדרה כי $\dim \ker T = 1$, אבל אנחנו יודעים כי $x^2 - x$ נשלח לאפס, ולכן הוא פורש את הגרעין, כלומר:

$$\ker T = \text{span}(x^2 - x) = U \cap W$$

וסיימנו. משל ■.

ג. (8 נקודות) תהא $T: V \rightarrow V$ כך ש $\text{Img } T = U + W$. הוכיחו או הפריכו: T הפיכה.

פתרון:

נוכיח את הטענה. כזכור, הוכחנו כי $\dim U + W = 3$, אך גם $\dim V = 3$. לכן מהכלה ושוויון ממדים מתקיים ש $\text{Img } T = V$ כלומר T על. אבל נזכור שבאופרטור (התחום שווה לטווח) מתקיים ש T על אם ורק אם היא חח"ע, ולכן היא חח"ע ועל ומכאן הפיכה.

משל ■.

3. (8 נקודות לכל סעיף) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: אם $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ אנטי-סימטרית (כלומר $A^t = -A$) אזי A לא הפיכה.

פתרון:

נפריך את הטענה. נבחר:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

כאשר:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

וכך גם $-A$ ולכן היא אנטי-סימטרית. אבל כמובן A הפיכה, שכן לאחר פעולת דירוג:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2, R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מקבלים את היחידה.

ב. לכל $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $AB = A + B$ מתקיים: אם A הפיכה אז B הפיכה.

פתרון:

נוכיח את הטענה. תהיינה מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $AB = A + B$ וכן A הפיכה. נביט במשוואה הראשונה:

$$AB = A + B$$

נכפיל את שני הצדדים ב A^{-1} משמאל ונקבל:

$$B = I + A^{-1}B$$

ולכן:

$$B - A^{-1}B = I$$

$$(I - A^{-1})B = I$$

ולכן:

$$B^{-1} = I - A^{-1}$$

כמבוקש. משל ■.

ג. יהי V מרחב וקטורי. לכל שתי קבוצות סופיות $A, B \subseteq V$ מתקיים: אם $\text{span}(A) \cap \text{span}(B) \neq \{0\}$ ובנוסף $\dim \text{span}(B) = 1$ אז $\text{span}(A) \cup \text{span}(B)$ תת-מרחב וקטורי של V .

פתרון:

נוכיח את הטענה. כזכור, איחוד של תתי מרחבים הוא תת מרחב אם ורק אם האחד מוכל השני. לכן, כיוון שהחיתוך $\text{span}(A) \cap \text{span}(B)$ אינו ריק, קיים וקטור שאינו אפס בשניהם. נסמנו ב v . כעת, אפשר לראות שמתקיים $v \in \text{span}(B)$, אבל $v \neq 0$ ולכן $\text{span}(B) = \text{span}(v)$ (שכן הממד של המרחב הזה הוא אחד). כעת נוכיח כי $\text{span}(B) \subseteq \text{span}(A)$. יהי $u \in \text{span}(B)$. לכן קיים סקלר $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש $u = \alpha v$. כעת v שייך לחיתוך, ומכיוון שהחיתוך תת מרחב אזי ודאי שגם αv שייך לחיתוך מתכונת הסגירות של תת המרחב, ולכן נקבל לבסוף כי $u = \alpha v \in \text{span}(A)$. סה"כ הוכחנו ש $\text{span}(B) \subseteq \text{span}(A)$ ולכן האיחוד שלהם הוא תת מרחב. כמבוקש, משל ■.

4. נחשוב על $\mathbb{F}^n$ כמרחב וקטורי עמודה. יהי $W \leq V$ תת-מרחב. נגדיר:

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{F}^n \mid \forall w \in W: v^t w = 0\}$$

א. (9 נקודות) הוכיחו או הפריכו: $W^\perp$ תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$.

פתרון:

נוכיח את הטענה. ניעזר בקריטריון המקוצר:

- נראה כי $\vec{0} \in W^\perp$. יהי $w \in W$, אכן: $\vec{0}^t w = 0$ שכן אם נסמן $w = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ הביטוי לעיל הינו $\sum_{i=1}^n 0 \cdot x_i = 0$.

- יהיו $u, v \in W^\perp$ וכן $\alpha \in \mathbb{F}$, ונוכיח כי $v + \alpha u \in W^\perp$. יהי $w \in W$, אזי:

$$(v + \alpha u)^t w = (v^t + \alpha u^t)w = v^t w + \alpha u^t w = \vec{0} + \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

כמבוקש. משל ■.

ב. (7 נקודות) הוכיחו: לכל שני מרחבים $W, U \leq \mathbb{F}^n$ (טעות הקלדה בטופס המקורי) מתקיים:

$$(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$$

פתרון:

נוכיח את השוויון במרחבים על ידי הכלה דו כיוונית.

$\subseteq$ יהי $v \in (U + W)^\perp$, נוכיח כי $v \in U^\perp \wedge v \in W^\perp$. נתחיל מ $U^\perp$. יהי $u \in U$ וצריך להוכיח כי:

$$v^t u = 0$$

נבחין, כי $u \in U + W$ ולכן בפרט עבור u יתקבל המבוקש, שכן לכל $x \in U + W$ מתקבל ש $v^t x = 0$. עבור $W^\perp$ הטענה זהה לחלוטין.

$\supseteq$ יהי $v \in U^\perp \cap W^\perp$, נוכיח כי $v \in (U + W)^\perp$. יהי $x \in U + W$ ונוכיח כי $v^t x = 0$. לכן, קיים פירוק עבור x :

$$x = u + w$$

כאשר $u \in U$ וגם $w \in W$. כעת:

$$v^t x = v^t(u + w) = v^t u + v^t w$$

אבל בגלל ש $v \in U^\perp$ מתקיים כי $v^t u = 0$, ובאותו אופן מכיון ש $v \in W^\perp$ אזי $v^t w = 0$ ובסה"כ נקבל:

$$v^t u + v^t w = 0$$

כמבוקש, משל ■.

ג. (7 נקודות) נתבונן ב $\mathbb{R}^4$ ובתת המרחב $W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. הוכיחו או הפריכו:

$$\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$$

פתרון:

נוכיח את הטענה. קל לראות כי:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

בסיס ל W כי הוקטורים הללו בת"ל. כעת נמצא בסיס ומימד ל $W^\perp$. תחילה נוכיח טענת עזר.

טענת עזר: יהי $W \leq V$ ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל W . אזי $v \in W^\perp$ אם ורק אם לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים כי: $v^t v_i = 0$ (במילים: מספיק לדרוש התאפסות של $v^t w$ רק עבור הבסיס של W)

הוכחה: הכיוון $\Leftarrow$ ברור (כי הבסיס מוכל ב W), נוכיח את הכיוון $\Rightarrow$. יהי $w \in W$. לכן קיימים סקלרים כך ש:

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

וצריך להוכיח כי:

$$v^t w = 0$$

כעת:

$$v^t w = \alpha_1 v^t v_1 + \dots + \alpha_n v^t v_n = 0$$

לפי הנתון. משל ■.

על פי טענת העזר, נקבל למעשה שעל פי השאלה שלנו:

$$W^\perp = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \mid v^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = v^t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

אם נסמן $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, נקבל למעשה מערכת משוואות:

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2, R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

וכמובן נקבל שהפתרון המתאים הוא:

$$W^\perp = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

כעת נוכיח ש $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$. לצורך ההוכחה, ניעזר בקריטריון שאומר ש $U \oplus W = V$ (כאשר V מו"ס) אם ורק אם $\dim U + \dim W = \dim V$ וגם $U \cap W = \{0_V\}$. אנחנו יודעים כי $4 = 2 + 2 = \dim W + \dim W^\perp$ כעת נראה כי החיתוך שלהם הוא מרחב האפס.

נעביר את W להצגה אלגברית:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & b \\ -1 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 + R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 3 & a + c \\ 0 & 0 & d \end{array} \right)$$

ולכן:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid b = d = 0 \right\}$$

כמו כן נעביר את $W^\perp$ להצגה אלגברית:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & d \end{array} \right)$$

ולכן:

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid a = c = 0 \right\}$$

ולכן ברור כי $W \cap W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ וסיימנו. משל ■.

העשרה:

למעשה, הביטוי $v^t w$ ממש מזכיר מכפלה סקלרית, ובאמת כאשר מכפלה סקלרית של שני וקטורים מתאפסת אזי הוקטורים ניצבים. בקורס אלגברה לינארית 2 אתם תכלילו את ההגדרה של מכפלה סקלרית (זה קרוי מכפלה פנימית) וכן תיתקלו ב $W^\perp$ ותקראו לו המרחב הניצב ל W . כמו כן, התוצאה שקיבלנו בסעיף ג' ניתן להכליל לכל תת מרחב:

$$W \oplus W^\perp = V$$

(כאשר V מונ"ס) ותוצאה זו נקראת גם כמשפט הפירוק הניצב.

5. (7 נקודות לכל סעיף) יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס.

א. תהא $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית, ונרשום:

$$T(v_1) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

תהא $S: V \rightarrow V$ העתקה לינארית כך שקיים $1 \leq j \leq n$ עבורו:

$$S(v_1) = v_j$$

$$\forall i \neq 1: S(v_i) = 0$$

הוכיחו שאם $TS = ST$ אז

$$T(v_j) = \alpha_1 v_j$$

פתרון:

$$Tv_j \stackrel{(1)}{=} TSv_1 \stackrel{(2)}{=} STv_1 \stackrel{(3)}{=} S\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) \stackrel{(4)}{=} \alpha_i \sum_{i=1}^n Sv_i \stackrel{(1)}{=} \alpha_1 v_j$$

כאשר:

(1) – על פי ההגדרה של S , מתקיים כי $Sv_1 = v_j$ (ואפס לכל וקטור אחר)

(2) - על פי זה ש $TS = ST$.

(3) - על פי הסימון שנתנו.

(4) - לינאריות של S .

משל ■.

ב. תהא $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית כך שלכל העתקה לינארית $S: V \rightarrow V$ מתקיים $TS = ST$. הוכיחו: קיים $\alpha \in \mathbb{F}$ עבורו

$$\forall v \in V: Tv = \alpha v$$

פתרון:

מה שנעשה יהיה להפעיל את סעיף א' n פעמים. פורמלית, נסמן:

$$Tv_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

כעת נגדיר העתקה לינארית $S_j: V \rightarrow V$ בעזרת משפט ההגדרה כך:

$$S_j v_1 = v_j$$

לכל $i \neq 1$:

$$S_j v_i = 0$$

כיוון שלכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים $TS_j = S_j T$, על פי סעיף א' נקבל כי:

$$\forall 1 \leq j \leq n: Tv_j = \alpha_1 v_j$$

נסמן $\alpha = \alpha_1$. יהי $v \in V$. כעת:

$$Tv = T\left(\sum_{j=1}^n c_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n c_j Tv_j = \sum_{j=1}^n \alpha c_j v_j = \alpha \left(\sum_{j=1}^n c_j v_j\right) = \alpha v$$

והוכחנו את המבוקש. משל ■.

הערה:

השאלה הזאת אמנם מסורבלת בשפה של העתקות לינאריות, אבל בשפה של מטריצות הטענה היא: תהי מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך שלכל $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מתקיים $AB = BA$, אזי $A = \alpha I$, כלומר A סקלרית.