

## מועד ג' חשבון אינפיניטסימלי 132 – 89, תשפ"א

מרצים: אלעד עטייא, ד"ר ארז שיינר.  
מתרגלים: אמונה ליפסקר, עקיבה מלכה, אלעד עטייא, ניקול צאירי,  
אושרית שטוסל.

### הוראות:

- משך הבחינה: שעתיים.
- כל חומר עזר אסור בשימוש, למעט מחשבון פשוט.
- כל שאלה שווה 27 נקודות, שאלה מיטיבה שווה 2 נקודות.
- בשאלות ה"רגילות" **נמקו כל צעד**. בשאלות המיטיבות תשובה סופית תספיק.

### שאלה 1:

הוכיחו שלכל  $x > 3$  מתקיים:

$$\frac{2 \ln(x-2)}{\sqrt{x+1}-2} > \frac{4\sqrt{x+1}}{x-2}$$

### שאלה 2:

א. (14 נק') תהי  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה כך שהגבולות  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  קיימים וסופיים. הוכיחו או הפריכו:  $f$  חסומה.

ב. (13 נק') חשבו את גבולל הסדרה הבאה, המוגדרת ע"י כלל נסיגה, כאשר  $a_1 > 0$ :  $a_{n+1} = a_n e^{a_n}$ .

### שאלה 3:

א. (14 נק') יהיו  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$  טורים חיוביים עבורם:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ . הוכיחו שאם  $\sum b_n$  מתכנס אז  $\sum a_n$  מתכנס.

ב. (13 נק') קבעו האם הטור:  $\sum \frac{n^{n-2}}{e^n n!}$  מתכנס. רמז: היעזרו בסעיף הקודם וזכרו ש:  $(1 + \frac{1}{n})^n < e$ .

### שאלה 4:

א. (13 נק') תהי  $f$  פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$ . הוכיחו שלכל 3 נקודות  $x_1, x_2, x_3$  קיימת  $c \in [a, b]$  כך ש:  $f(c) = \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}$ .

ב. (14 נק') תהי  $f$  פונקציה גזירה בכל הממשיים, הוכיחו או הפריכו:  $f'$  חסומה בכל קטע סגור  $[a, b]$ .

**שאלות מיטיבות:**

5. חשבו את הגבול:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \cos \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2 \sin \frac{1}{n}}$ .

6. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{(n+1)(n+2)} - \frac{3^{2n}}{7 \cdot 10^n}\right)$ .

7. מצאו את  $f'$  כאשר:  $f(x) = \arctan\left(x\sqrt{\sqrt{x+1}}\right)$ .

8. קבעו עבור אלו ערכים של  $a, b$ , לפונקציה הבאה יש אי-רציפות מסוג

ראשון (קפיצה) בנקודה  $x = 0$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \arctan(ae^x - a)}{(2e^x - 2)^2} & x > 0 \\ \frac{b\sqrt{x+1} - b}{\sqrt{3x+9} - 3} & x < 0 \end{cases}$$