

## מבוא לטופולוגיה – תרגיל 6 (פתרון)

### שאלה 1

(א) צריך לעשות בדיקות טכניות איבר-איבר. אעזור אם מישהו יתקשה.  
(ב) תנו דוגמאות בהן מתקיימות הכלות של ממש בנוסחאות 20 ו-24.

### פתרון

$$f(\cap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \cap_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \quad 20.$$

דוגמה:

יהיו:

$$f(a_1) = f(a_2) = b, (a_1 \neq a_2) \quad A_1 = \{a_1\}, A_2 = \{a_2\}, I = \{1,2\}$$

אזי  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  ו-  $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$ . אבל  $f(A_1) = f(A_2) = \{b\}$   
לכן  $f(A_1) \cap f(A_2) = \{b\} \supset \emptyset = f(A_1 \cap A_2)$ .

$$f^{-1} \circ f(A) \supseteq A \quad 24.$$

דוגמה:

יהיו:  $f(a_1) = f(a_2) = b, A = \{a_1\}, X = \{a_1, a_2\}$   
אזי  $f^{-1} \circ f(A) = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{b\}) = X \supset A$

### שאלה 2

### תזכרת

נסמן ב- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  סדרת מספרים ממשיים שאיבר ה- $n$  שלה הוא מספר  $x_n$ .  
תהי  $l_\infty$  קבוצה של כל הסדרות הממשיות החסומות, ז"א,

$$l_\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$$

נזכיר שהוכח בתרגיל בית 3, שאלה 1. א' שפונקציה  $d: l_\infty \times l_\infty \rightarrow [0, \infty)$  כאשר  $d_\infty((x_n), (y_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$ , מהווה מטריקה על  $l_\infty$ .

=====

יהי  $X$  קבוצת הסדרות כך ש- $X = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ .

הוכיחו:

- (א)  $X \subseteq l_\infty$
- (ב) הקבוצה  $F$  של הסדרות מסוג  $(x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$  (ז"א, הסדרות עם מספר סופי של איברים לא אפסיים) היא תת-קבוצה ב- $X$ .
- (ג)  $F$  צפופה ב- $X$  בטופולוגיה המושרת על ידי המטריקה  $d$ .

פתרון

- (א) יהיה  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ . אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  לפי שעשינו בבית וגם בכיתה – כל איבריה של הסדרה החל ממספר  $N$  מסוים נמצאים בתוך כדור. אם נגדיל את הרדיוס של הכדור כך שגם קבוצה סופית  $\{x_1, \dots, x_{N-1}\}$  תימצא בכדור המוגדל, אז נקבל שהסדרה חסומה, ז"א,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_\infty$ , מש"ל.
- (ב) יהיה  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ . אזי כל איבריה של הסדרה החל ממספר  $N$  מסוים שווים ל-0. אזי (תרגילי בית וכיתה) הסדרה קבועה לבסוף ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , זאת אומרת,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ , מש"ל.

- (ג) צריך להוכיח ש- $\bar{F} = X$ . יהיה  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$  ותהי  $U$  סביבה של  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . אזי קיים  $\varepsilon > 0$  כך ש- $B((x_n), \varepsilon) \subseteq U$ . כיוון ש- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ , אז  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . לפי הגדרת הגבול קיים  $n_0 \in \mathbb{N}$  כך ש- $|x_n| < \varepsilon$  כאשר  $n \geq n_0$ . אם אנחנו אכשיו נתבונן בסדרה  $(y_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}, 0, 0, \dots)$  אז נראה ש- $(y_n) \in F$  ונקבל:

$$d_\infty((x_n), (y_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|x_1 - x_1|, \dots, |x_{n_0-1} - x_{n_0-1}|, |x_{n_0}|, |x_{n_0+1}|, \dots\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{0, \dots, 0, |x_{n_0}|, |x_{n_0+1}|, \dots\} < \varepsilon.$$

זאת אומרת,  $(y_n) \in B((x_n), \varepsilon) \subseteq U$ , ולכן  $U \cap F \neq \emptyset$ .  
 אז הוכחנו בעצם שכל סביבה של  $(x_n)$  נחתכת עם  $F$ . זה אומר ש-  $(x_n) \in \bar{F}$ , מש"ל.

### שאלה 3

נתבונן ברבוע  $Q$  במשור  $\mathbb{R}^2$  עם הקודקדים:  $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ .

ז"א:

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y = 1\} \\ \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

הוכיחו ש- $Q$  אינו איזומורפי ל- $\mathbb{R}$ , ולשום קטע (פתוח, סגור או חצי סגור) ב- $\mathbb{R}$  ולשום קרן (פתוחה או סגורה מצד אחד) ב- $\mathbb{R}$ .

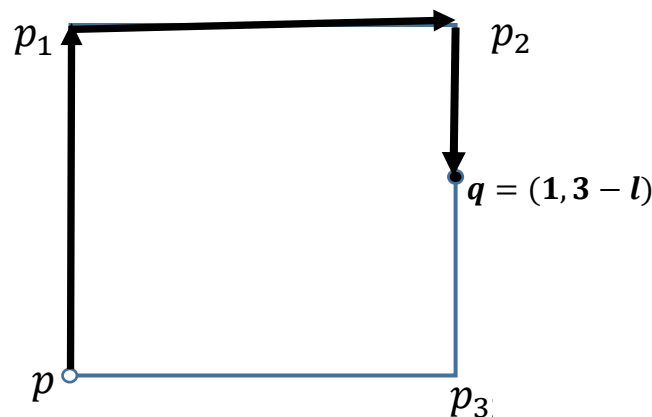
הוכחה.

קודם כל נוכיח טענה הבאה:

טענה

אם  $p$  אחד מהקודקדים של הריבוע  $Q$  אז  $Q' = Q - \{p\}$  מרחב טופולוגי קשיר (כאשר הטופולוגיה מושרת מהמשור האוקלידי)

הוכחת הטענה. נוכיח את זה כאשר  $p = (0,0)$ . (לשלושת הקודקדים האחרים ההוכחה תהיה בעצם אותה ההוכחה רק הנוסחהות של  $\varphi$  קצת ישתנו.)



נגדיר פונקציה  $\varphi: (0,4) \rightarrow Q'$  כך שאם נקודה זזה לאורך הקו השבור  $p, p_1, p_2, p_3, p$  (לקוון השעון, ראה הציור) אז כשהיא עברה מסלול עם אורך  $l$ , הקוורדינטות של המקום שלה:  $\varphi(l)$ :

$$\varphi(l) = \begin{cases} (0, l), & l \in (0,1] \\ (l-1, 1), & l \in [1,2] \\ (1, 3-l), & l \in [2,3] \\ (4-l, 0), & l \in [3,4] \end{cases}$$

הדוגמה בציור:  $l = d(p, p_1) + d(p_1, p_2) + d(p_2, q) = 2 + d(p_2, q)$   
 ו- $\varphi(l) = (1, 3-l)$ .

קל לראות שהפונקציות:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi|_{(0,1]} \text{ כאשר } \varphi_1: (0,1] \rightarrow Q' \\ \varphi_2 &= \varphi|_{[1,2]} \text{ כאשר } \varphi_2: [1,2] \rightarrow Q' \\ \varphi_3 &= \varphi|_{[2,3]} \text{ כאשר } \varphi_3: [2,3] \rightarrow Q' \\ \varphi_4 &= \varphi|_{[3,4)} \text{ כאשר } \varphi_4: [3,4) \rightarrow Q' \end{aligned}$$

רציפות (אפשר להשתמש, למשל, קריטריון הסדרות).

אם נעיר שהקטעים  $(0,1], [1,2], [2,3], [3,4)$  מהווים כיסוי סגור סופי של  $(0,4)$  אז לפי אחד מהמשפטים של בנית פונקציות רציפות (ההרצאה האחרונה) אפשר להסיק ש- $\varphi$  רציפה ו- $\varphi((0,4)) = Q'$ . אבל  $(0,4)$  מרחב קשיר ולכן התמונה שלו תחת העתקה רציפה גם קשיר (ההרצאה האחרונה). אזי  $Q'$  קשיר, מש"ל. (של הטענה)

עכשיו נניח בשלילה שקיים איזומורפיזם  $i: Q \rightarrow X$ .

מקרה 1.  $X = \mathbb{R}$  או  $(a, b)$  או  $(a, \infty)$  או  $(-\infty, b)$

אזי אם נסמן  $p = (0,0)$  אז גם

$i|_{Q-\{p\}}: Q-\{p\} \rightarrow X-\{i(p)\}$  איזומורפיזם. אבל לפי הטענה  $Q-\{p\}$  מרחב קשיר ו- $X-\{i(p)\}$  אחוד של שתי קבוצות פתוחות ולא ריקות ולכן – לא קשיר. סתירה.

מקרה 2.  $X = [a, b]$  או  $X = (a, b)$  או  $(a, b]$  או  $[a, \infty)$  או  $(-\infty, b]$ .  
 לפי הטענה אפשר להוציא מ- $Q$  קודקוד  $p$  כלשהו ו- $Q - \{p\}$  יהיה קשיר.  
 אז יהיה  $p \in Q$  קודקוד כך ש-:

$$\begin{aligned} X = [a, b] & \text{ אם } - i(p) \neq a \wedge i(p) \neq b \\ X = [a, \infty) \text{ או } X = (a, b) & \text{ אם } - i(p) \neq a \\ X = (-\infty, b] \text{ או } X = (a, b) & \text{ אם } - i(p) \neq b \end{aligned}$$

זאת אומרת,  $X - \{i(p)\}$  המרחב לא קשיר אם מדובר בכל מרחבי  $X$  של מקרה 2.  
 אבל - לפי ההנחה - הוא איזומורפי ל- $Q - \{p\}$ , שקשיר לפי הטענה. סתירה.

#### שאלה 4

תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה. הוכיחו שהגרף של הפונקציה, זאת אמרת, הת-מרחב של המשור האוקלידי  $\mathbb{R}^2$  המוגדר על ידי נוסחה:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$$

הוא מרחב טופולוגי קשיר. (רמז: הוכיחו שפונקציה  $(x \mapsto (x, f(x)))$  רציפה.)

#### הוכחה

תהי  $g: (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$  פונקציה כך ש-  $g(x) = (x, f(x))$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ ,  
 $d$  מטריקה רגילה ב- $\mathbb{R}$  ו- $d_\infty$  מטריקה ב- $\mathbb{R}^2$  המוגדרת על ידי הנוסחה:

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

(מטריקה הידועה מההרצאות ומהתרגולים).

#### נוכיח ש- $g$ רציפה בכל נקודה.

יהי  $a \in \mathbb{R}$  ו- $x_n \in \mathbb{R}$  - סדרה כך ש- $x_n \rightarrow a$  אזי  $|x_n - a| = d(x_n, a) \rightarrow 0$ .  
 כיוון ש- $f$  רציפה אז  $f(x_n) \rightarrow f(a)$  ולכן  $|f(x_n) - f(a)| \rightarrow 0$ .

מכאן:

$$d_\infty((x_n, f(x_n)), (a, f(a))) = \max\{|x_n - a|, |f(x_n) - f(a)|\} \rightarrow 0$$

ולכן  $(a, f(a)) \rightarrow (x_n, f(x_n))$  (ההרצאות) ואז  $g$  רציפה ב- $a$ . לפי משפט אחד מההרצאות:  $g$  רציפה בכל  $\mathbb{R}$ .

הערה. הוכחנו רציפות  $g$  ביחס למטריקה  $d_\infty$  במשור. אבל כידוע לנו המטריקה הזאת שקולה למטריקה אוקלידית ולכן  $g$  רציפה ביחס לטופולוגיה המושרת על ידי שתי המטריקות השקולות. (סוף הוכחת הרציפות).

עכשיו נעיר ש-  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} = g(\mathbb{R})$ .

כיוון ש-  $\mathbb{R}$  מרחב קשיר אז גם  $G$  – כתמונה שלו תחת הפונקצי הרציפה  $g$  - מרחב קשיר (ההרצאה האחרונה), מש"ל.

## שאלה 5

תהי  $X$  קבוצה אינסופית. תהי  $\tau$  - קבוצת תת-קבוצות ב- $X$  כך ש- $\{\emptyset\} \cup \{U^c \mid U \subseteq X \text{ קבוצה סופית}\} = \tau$ .

### הוכיחו:

(א)  $\tau$  – טופולוגיה ב- $X$  (עשינו את זה פעם בכיתה!)  
 (ב)  $(X, \tau)$  מרחב קשיר.

## פתרון

(א)

1.  $\emptyset \in \tau$  לפי הגדרה.  $X = \emptyset^c \in \tau$  כי  $\emptyset$  קבוצה סופית.

2. יהי  $U_\alpha \in \tau$  לכל  $\alpha \in I$ . אזי:

$$(\cup_{\alpha \in I} U_\alpha)^c = \cap_{\alpha \in I} U_\alpha^c$$

לפי ההגדרת  $\tau$ , אז גם  $(\cup_{\alpha \in I} U_\alpha)^c$  סופי ו- $U_\alpha$  שייך ל-  $\tau$ .

3. יהי  $U_n \in \tau$  לכל  $n \in \mathbb{N}$ . אזי:

$$(\cap_{1 \leq n \leq K} U_n)^c = \cup_{1 \leq n \leq K} U_n^c$$

לפי ההגדרת  $\tau$ , אז גם  $(\cap_{1 \leq n \leq K} U_n)^c$  סופי ו- $U_n$  שייך ל-  $\tau$ .

שייך ל-  $\tau$ .

אז הוכח ש- $\tau$  טופולוגיה. מש"ל.

(ב) נניח – בשליטה ש- $(X, \tau)$  אינו קשיר. אזי קיימת קבוצה  $U \subseteq X$  כך ש-

$$(*) \quad U, U^c \neq \emptyset$$

$$(**) \quad U, U^c \in \tau$$

$$(***) \quad U \cup U^c = X$$

אבל מ- $(**)$  נובע ש- $U, U^c$  קבוצות סופיות. לכן – בגלל  $(***)$  – גם  $X$  קבוצה סופית. סתירה. אז  $(X, \tau)$  קשיר. מש"ל.