בסיסים

הגדרה

יהי (X,τ) מ"ט. משפחה B של קבוצות <u>פתוחות</u> תיקרא בסיס ל(X,τ) אם בנוסף

$(*)$ לכל קבוצה פתוחה O ולכל $x \in O$ קיימת $v \in B$ כך ש$x \in V \subseteq O$.

תנאי שקול ל$(*)$: כל קבוצה פתוחה ניתן להציג כאיחוד של קבוצות מהבסיס.

תרגיל

תהי X אינסופית. נגדיר $B := \{V \subseteq X | 1000 < |V^c| < \infty\}$. נראה ש$B$ בסיס ל(X, τ_{cof}).

פתרון

ברור שלכל $V \in B$ מתקיים V פתוחה, לכן מ"ל את תנאי $(*)$.

תהי $O \in \tau_{\text{cof}}$ ונניח $x \in O$. נראה שקיימת $V \in B$ כך ש$x \in V \subseteq O$. $O \neq \emptyset$ פתוחה, ולכן O^c סופית. X אינסופית ולכן O אינסופית. בפרט קיימות בO לפחות 1001 נקודות שונות מX שנסמנן $x_1, \dots x_{1001}$.

תהי $V = O \backslash \{x_1, \dots x_{1001}\}$. ברור ש$X \in V \subseteq O$. נראה ש$V \in B$.

$$V^c = O^c \cup \{x_1, \dots x_{1001}\}$$

מתקיים $|V^c| > 1000$, וכן V^c סופית כאיחוד של שתי סופיות. מכאן $V \in B$.

הערה

ראינו בהרצאה שאם $f : X \to Y$ פונקציה בין מ"ט וB בסיס לY, אזי

f רציפה $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(U)$ פתוחה לכל $U \in B$.

ניזכר בהגדרה הבאה: $a \in \text{cl}(A)$ $\Leftrightarrow$ לכל U סביבה של a $U \cap A \neq \emptyset$.

טענה: יהי X מ"ט, B בסיס לX, $A \subseteq X$, $a \in X$.

$a \in \text{cl}(A)$ $\Leftrightarrow$ לכל סביבה בסיסית $a \in U \in B$ מתקיים $U \cap A \neq \emptyset$.

הוכחה:

$\Leftarrow$ טריוויאלי כי אם $U \in B$ אז U פתוחה.

$\Rightarrow$ תהי U סביבה של a. נראה ש$U \cap A$ ומכאן $a \in \text{cl}(A)$

$a \in U \Leftarrow$ קיימת $V \in B$ כך ש$a \in V \subseteq U$. V סביבה בסיסית של a ולכן מההנחה נקבל ש

$$V \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$$

מרחבי מכפלה

יהיו (X,τ_X), (Y,τ_Y) מ"ט. נגדיר בסיס B לטופולוגיה על הקבוצה $X\times Y$. הטופולוגיה הזו תיקרא טופולוגית המכפלה.

$$B:=\left\{O_1\times O_2\middle|\begin{array}{l}O_1\in\tau_X\\O_2\in\tau_Y\end{array}\right\}$$

נוכיח בהמשך שזו הטופולוגיה החלשה ביותר כך שההטלות רציפות.

למה

יהי B_1 בסיס ל(X,τ) ותהי $B_2\subseteq B_1$.
אזי B_2 בסיס ל(X,τ) $\Leftrightarrow$ לכל $U\in B_1$ ולכל $x\in U$ קיימת $V\in B_2$ כך ש$x\in V\subseteq U$.

הוכחה: תרגיל

טענה(בסיס למכפלה)

יהיו $\{X_i,\tau_i\}_{i=1}^n$ מ"ט והי B_i בסיס ל(X_i,τ_i) לכל i.
אזי $M_2:=\{O_1\times\cdots\times O_n|O_i\in B_i\}$[1] בסיס לטופולוגית המכפלה על $X=X_1\times\cdots\times X_n$

הוכחה

$$M_1:=\{O_1\times\cdots\times O_n|O_n\in\tau_i\}$$

בסיס לטופולוגית המכפלה. $M_2\subseteq M$(למה?). נעזר בלמה כדי להראות שM_2 בסיס לטופולוגיית המכפלה.
תהי $O=O_1\times\cdots\times O_n\in M_1$ ו$x=(x_1,\dots x_n)\in O$, לכל $1\le i\le n$ $x_i\in O_i\in\tau_i$, וכמו כן B_iבסיס ל(X_i,τ_i). מהגדרת בסיס נקבל שלכל $1\le i\le n$ קיימת $V_i\in B_i$ כך ש$x_i\in V_i\subseteq O_i$. לכן $V=V_1\times\cdots\times V_n\in M_2$ ומתקיים $x\in V\subseteq O$.

טענה

יהיו $(X_1,\tau_1),\dots(X_n,\tau_n)$ מ"ט מטריזבילים. אזי $X=\prod_{i=1}^n X_i$ מטריזבילי.

הוכחה

מכיוון שהמרחבים מטריזבילים קיימות מטריקות $d_1,\dots d_n$ המשרות את $\tau_1,\dots\tau_n$. נגדיר מטריקה על קבוצת המכפלות באופן הבא:

$$\begin{array}{l}x=(x_1,\dots x_n)\\y=(y_1,\dots y_n)\end{array}\qquad d_{\max}(x,y)=\max\{d_i(x_i,y_i)|1\le i\le n\}$$

[1] כדי שהסימנים יתאימו למה שכתוב בלמה, אנו קוראים לזה M_2 ולקבוצה שנגדיר בתחילת ההוכחה M_1.

תהי τ_Π טופולוגיית המכפלה, $\tau_{\max}$ הטופולוגיה המושרית מ$d_{\max}$. נראה $\tau_\Pi = \tau_{\max}$.
נוכיח ע"י הכלה דו כיוונית:

$\subseteq$ **טענה עזר 1:** $P_i : (X, \tau = d_{\max}) \to (X_i, d_i)$ רציפה לכל i.

הוכחה: נוכיח רציפות ב$X = (X_1, \dots X_n)$.
יהי $\varepsilon > 0$. צ"ל שקיים $\delta > 0$ כך שאם $d_{\max}(x,y) < \delta$ אזי $d_i(P_i(x), P_i(y)) < \varepsilon$. ניקח $\delta = \varepsilon$.

$$d_i(P_i(x), P_i(y)) = d_i(x_i, y_i) \leq d_{\max}(x,y) < \delta = \varepsilon$$

מסקנה: $\tau_\Pi \subseteq \tau_{\max}$.

הסבר: $P_i : (X, \tau_{\max}) \to (X_i, \tau_i)$ רציפה.

נוכיח בהמשך שטופולוגיית המכפלה היא <u>החלשה ביותר</u> כך שההטלות רציפות.

$\subseteq$ **טענת עזר 2:** $B_{\max}(x, \varepsilon) = B_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times B_d(x_n, \varepsilon)$ כאשר $x = (x_1, \dots x_n)$.

הוכחה: $y \in B_{\max}(x, \varepsilon) \Leftrightarrow d_{\max}(x,y) < \varepsilon \Leftrightarrow d_i(x_i, y_i) < \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$$\forall_i y_i \in B_{d_i}(x_i, \varepsilon)$$

$$\Updownarrow$$

$$y \in B_{d_1}(x_1, \varepsilon) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n, \varepsilon)$$

מסקנה 2: $\tau_\Pi \supseteq \tau_{\max}$

הסבר: $C_{\max} = \left\{ B_{\max}(x, \varepsilon) \middle| \begin{array}{c} x \in X \\ \varepsilon > 0 \end{array} \right\}$ זהו בסיס ל$(X, \tau_{\max})$.

$$C_\Pi = \{B_{d_1}(x_1, \dots \varepsilon_1) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n, \varepsilon_n) | x_i \in X_i, \varepsilon_i > 0\}$$

בסיס ל(X, τ_Π) לפי טענה(בסיס למכפלה). לפי טענת עזר 2, מתקיים $C_{\max} \subseteq C_\Pi \subseteq \tau_\pi$. לפי <u>תרגיל שנוכיח בש"ב</u> נקבל $\tau_{\max} \subseteq \tau_\Pi$.

נוכיח בש"ב: אם τ_1, τ_2 טופולוגיות על X וB_1 בסיס ל(X, τ_1) אזי $B_1 \subseteq \tau_2 \Leftarrow$ $\tau_1 \subseteq \tau_2$

מסקנה סופית: $\tau_\Pi = \tau_{\max}$ ולכן X מטריזבילי.

דוגמה

לכל $1 \le i \le n$ ניקח $X_i = \mathbb{R}$. אזי טופולוגיית המכפלה על $\mathbb{R}^n$ מטריזבילית ומתלכדת עם $d_{\max}$.

מכפלה אינסופית

תהי I קבוצת אינדקסים ויהי $\{X_i\}_{i\in I}$ אוסף של קבוצות. נגדיר

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \middle| f(i) \in X_i \right\}$$

הסבר במקרה הסופי

ניקח בתור דוגמה

$$X_1 = \{3,5\} \qquad X_2 = \{4,6\}$$

$$(3,4) \in X_1 \times X_2$$

$$f = \left(\dots, \underbrace{\overbrace{f(i)}^{\in X_i}}_{i\text{th place}}, \dots \right)$$

הטלה

בנוסף ניתן להגדיר את פונקיית ההטלה

$$P_j : \prod_{x\in I} X_i \to X_j$$

ע"י $P_j(f) = f(j)$.

טופולוגיית המכפלה

יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ מ"ט. נגדיר בסיס לטופולוגיית המכפלה על $X = \prod_{i\in I} X_i$

$$B := \left\{ \prod_{i\in I} A_i \middle| \forall_i A_i \in \tau_i, \exists_{\text{finite } F\subseteq I} \forall_{i\notin F} A_i = X_i \right\}$$

הערה: אם I סופית, אזי אפשר לבחור $F=I$ ואז $\forall_{i\notin F}A_i=X_i$ מתקיים באופן ריק.

ראינו בהרצאה שעם טופולוגייה זו ההטלות הן רציפות ופתוחות. נוכיח שטופולוגיית המכפלה היא הטופולוגיה החלשה ביותר שבה ההטלות רציפות.

טענה

יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ מרחבים טופולוגיים. תהי τ טופולוגיה על $X=\prod\limits_{x\in I}X_i$ (לאו דווקא טופולוגיית המכפלה).

נניח $P_i:(X,\tau)\to(X_i,\tau_i)$ רציפה לכל $i\in I$. אזי $\tau_\Pi\subseteq\tau$.

הוכחה

ע"פ תרגיל שתוכיחו בש"ב מ"ל שכל קבוצה בסיסית מטופולוגיית המכפלה שייכת לτ.

תהי $A=\prod\limits_{i\in I}A_i\in B$. אזי לכל $i\in I$, $A_i\in\tau_i$ וקיימת קבוצה סופית $F\subseteq I$ כך ש$\forall_{i\notin F}A_i=X_i$.

לכל $i\in F$, $P_i:(X,\tau)\to(X_i,\tau_i)$ רציפה. $\forall_i A_i\in\tau_i$.

$$P_i^{-1}(A_i)=\prod_{j\in I}Y_j$$

כאשר

$$Y_j=\begin{cases}A_j & j=i\\ X_j & j\neq i\end{cases}$$

לכן $P_i^{-1}(A_i)\in\tau$ (כי P_i רציפה, $A_i\in\tau_i$).

$$A=\bigcup_{i\in\underbrace{F}_{\text{finite}}}P_i^{-1}(A_i)\in\tau$$

(חיתוך סופי של פתוחות)