אוניברסיטת בר-אילן, המחלקה למדעי המחשב

אלגברה ליניארית 2 - (89113-01/02/03)

שנה"ל תש"ף, סמסטר ב', מועד א' - 06/07/2020 16:00 מטלה 1.1

מרצים: ד"ר מצרי אליהו (89113-01), פרופ' עדין רון (89113-02), ד"ר בק יונתן (89113-03)

<u>שאלה פתוחה (30 נקודות)</u>

תהי $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ (כל האברים ממשיים), ותהי $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ מטריצה המקיימת: $A^2 = B$.

א. (6 נק') הוכיחו: לא יתכן שכל אברי A ממשיים.
ב. (6 נק') רשמו את כל האפשרויות עבור הערכים העצמיים של A . נמקו.
ג. (6 נק') הוכיחו או הפריכו: כל מטריצה A כזאת היא לכסינה (מעל $\mathbb{C}$).
ד. (6 נק') הוכיחו או הפריכו: יש A כזאת שהיא אוניטרית.
ה. (6 נק') מצאו במפורש מטריצה A כזאת.

<u>פתרון</u>

א. הדטרמיננטה $\det(B) = 3\cdot(-3) - 2\cdot(-4) = -1$, **ולכן** $(\det(A))^2 = \det(A^2) = -1$.
אילו כל אברי A היו ממשיים, גם $\det(A)$ היתה ממשית, והריבוע שלה היה ממשי אי-שלילי.
זה לא המצב כאן.

ב. הפולינום האופייני של B הוא $\det(xI - B) = (x-3)(x+3) + 8 = x^2 - 1$, ולכן הערכים העצמיים של B הם $1, -1$. אם λ_1, λ_2 הערך העצמיים של A אז λ_1^2, λ_2^2 הערכים העצמיים של A^2 , ולכן ל- A יש ערך עצמי אחד ± 1 וערך עצמי אחד $\pm i$. בסך הכל יש ארבע אפשרויות עבור זוג הערכים העצמיים של A : $\{1, i\},\ \{1, -i\},\ \{-1, i\},\ \{-1, -i\}$.

ג. הוכחה: בכל האפשרויות בסעיף ב' יש ל- A שני ע"ע מרוכבים שונים, ולכן היא לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

ד. הפרכה: אילו A היתה אוניטרית אז גם $B = A^2$ היתה אוניטרית, וקל לראות שזה לא המצב.
<u>הערה:</u> אם מטריצה היא אוניטרית אז כל הערכים העצמיים הם בעלי ערך מוחלט 1, אך לא להיפך!

ה. נלכסן את B ע"י מציאת וקטורים עצמיים. בחישוב מפורט (יש לכלול אותו בפתרון!) אפשר לקבל $B = PDP^{-1}$ למשל עבור $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. אם נגדיר כעת $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ אז $A := PD_1P^{-1}$ מקיימת $A^2 = (PD_1P^{-1})^2 = PD_1^2P^{-1} = PDP^{-1} = B$. בחישוב מפורש:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-i & 1-i \\ -2+2i & -1+2i \end{pmatrix}$$

כדאי לבדוק שאכן $A^2 = B$. יש כמובן גם תשובות נכונות אחרות.