פיתרון תרגיל מספר 10

תשובה 1:

.1 $$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^3\le y)=P(X\le\sqrt[3]{y})=\int_0^{\sqrt[3]{y}}\lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda\cdot\sqrt[3]{y}}$$

$$f_Y(y)=\left(F_Y(y)\right)'=\frac{\lambda}{3}\sqrt[3]{y^2}e^{-\lambda\cdot\sqrt{y}}$$

תשובה 2:

נסמן ב-X וב-Y בהתאמה, את הזמנים (בדקות) לאחר השעה 12:00 שבהם הגבר והאישה מגיעים לפגישה. X ו-Y הם משתמשים מקריים בלתי תלויים, שלכל אחד מהם התפלגות אחידה בקטע [0,60]. לכן, ההסתברות המבוקשת היא- $P(X+10<Y)+P(Y+10<X)$. מטעמי סימטריה הסתברות זו שווה ל- $2P(X+10<Y)$, והיא מתקבלת כך-

$$2P(X+10<Y)=2\iint_{x+10<y}f(x,y)dxdy=2\iint_{x+10<y}f_X(x),f_Y(y)dxdy=$$

$$=2\int_{10}^{60}\int_0^{y-10}(1/60)^2dxdy=2/60^2\int_{10}^{60}(y-10)dy=25/36$$

תשובה 3:

א. צריך לבדוק ש $\iint f_{x,y}(x,y)dxdy=1$

אכן $\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f(x,y)dxdy}=\int_0^1\int_0^2\frac{6}{7}\left(\mathrm{x}^2+\frac{\mathrm{xy}}{2}\right)\mathrm{dydx}=\int_0^1\frac{6}{7}\left[\mathrm{x}^2\mathrm{y}+\frac{\mathrm{xy}^2}{4}\right]_0^2\mathrm{dx}=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=1$

ב.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{6}{7}\left(\mathrm{x}^2+\frac{\mathrm{xy}}{2}\right)dy=\frac{6}{7}\left[\mathrm{x}^2\mathrm{y}+\frac{\mathrm{xy}^2}{4}\right]_0^2=\frac{12}{7}x^2+\frac{6}{7}x$$

תשובה 4:

ראשית פונקצית ההצטברות והצפיפות הן:

$$F_X(x)=\frac{x+1}{2}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$$

.א

$$Y=\sqrt{|X|}$$

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(\sqrt{|X|}\le y\right)=P\left(X\le y^2\right)=F_X(y)=\frac{y^2+1}{2}$$

$$f_Y(y)=\frac{2y}{2}=y$$

ב.

$$Y = -\ln(|X|)$$

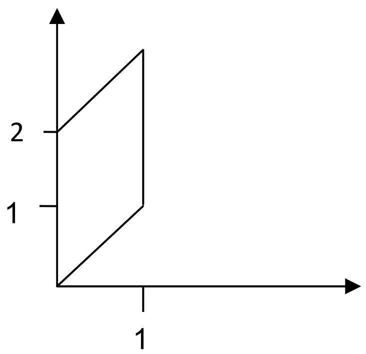
$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\ \ \ln(|X|) \le y) = P(\ln(|X|) \ge y) = P(|X| \ge e^y)$$

$$= P(X \ge e^y) + P(X \le -e^y) = 1 - F_X(e^y) + F_X(-e^y) = 1 - \left(\frac{e^y + 1}{2}\right) + \left(\frac{-e^y + 1}{2}\right) = 1 - e^y$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y \le 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

<u>תשובה 5:</u>

ראשית נצייר את התחום הרלוונטי :



נתון $X \sim U(0,1)$ לכן $f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & other\ wise \end{cases}$ ו- $Y|X = x \sim U(x, x+1)$ לכן

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} 1 & x \le y \le x+1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

א. לכל $0 \le x \le 1$ ו- $x \le y \le x+1$ הצפיפות המשותפת היא $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x) = 1 \cdot 1 = 1$ אחרת, לפחות אחת מהפונקציות $f_X(x)$ ו- $f_{Y|X=x}(y)$ מתאפסת ולכן $f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x)$ מתאפסת.

ב. עבור $0 \le y \le 2$: ראשית נשים לב ש $x \le y \le x+1$ לכן $y - 1 \le x \le y$ וגם $0 \le x \le 1$ לכן נחלק ל-2 מקרים כש - $0 \le y \le 1$ מתקיים $0 \le x \le y$ וכש- $1 < y \le 2$ מתקיים $y - 1 \le x \le 1$.

לכן עבור התחום הראשון: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y 1dx = y$

ובתחום השני: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{y-1}^{1} 1dx = 2 - y$

דהיינו $f_Y(y) = \begin{cases} y & 0 \le y \le 1 \\ 2 - y & 1 < y \le 2 \end{cases}$.

עבור כל ערך אחר של y פונקציית הצפיפות המשותפת שווה לאפס ולכן $f_Y(y) = 0$.

ג. בבירור $f_X(x) \cdot f_Y(y) \ne f_{X,Y}(x,y)$ למשל קחו $x = 0, y = 1$ אגף ימין הוא 0 ושמאל $1 \cdot 1 = 1$. לכן המשתנים תלויים.

ד. פונקציית הצפיפות בתחום $0 \le y \le 2$ היא

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{Y|X=x}(y)\cdot f_X(x)}{f_Y(y)} = \frac{1}{f_Y(y)}$$

ובכל מקום אחר היא 0 .

לכן $$X|Y=y \sim \begin{cases} U(0,y) & 0 \le y \le 1 \\ U(y,2) & 1 < y \le 2 \end{cases}$$

ה. מאחר ש $Y|X=x \sim U(x,x+1)$ נקבל ש $E(Y|X) = \frac{X+(X+1)}{2} = X + \frac{1}{2}$.

ו. $E(Y) = E_X\left(E_{Y|X}(Y|X)\right) = E\left(X+\frac{1}{2}\right) = E(X) + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

<u>תשובה 6:</u>

נתון : $X \sim N(500,100^2)$

א. $$P(X > 700) = P(Z > \frac{700-500}{100}) = P(Z > 2) = 1-\Phi(2) = 1-0.9772 = 0.0228$$

ב. $$P(X < 400) = P(Z < \frac{400-500}{100}) = \Phi(-1) = 1-\Phi(1) = 1-0.8413 = 0.1587$$

ג. במילים אחרות : מה ההסתברות שסטודנט יקבל ציון בין 500 ל- 600

$$P(500 < X < 600) = P(\frac{500-500}{100} < Z < \frac{600-500}{100}) = \Phi(1)-\Phi(0) = 1-\Phi(1) =$$
$$= 0.8413 - 0.5 = 0.3413$$

ואם מעוניינים להשיב באחוזים פשוט מכפילים את ההסתברות פי 100 !

$$\Rightarrow 0.3413 \times 100 = 34.13\%$$

ד. במילים אחרות, מבקשים את האחוזון ה- 90 : X_{90}

$$P(X \le X_{90}) = 0.9$$
$$\Rightarrow P(Z \le \frac{X_{90}-500}{100}) = 0.9$$
$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{X_{90}-500}{100}\right) = 0.9$$
$$\Rightarrow \frac{X_{90}-500}{100} = Z_{0.9} = 1.285$$
$$\Rightarrow X_{90} = 628.5$$

כלומר : 90% מהניגשים למבחן הפסיכומטרי ומועמדים לאוניברסיטאות קיבלו ציון 628.5 ומטה.

תשובה 7:

נתון : $X \sim N(550,150^2)$

א. $P(X>800)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{800-550}{150})=1-P(Z\le 1.67)=1-0.9525=0.0475$,

כלומר 4.75%.

ב. $P(X<200)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{200-550}{150})=P(Z<-2.33)=$ כלומר 0.99%.

$1-P(Z<2.33)=1-0.9901=0.0099$

ג. $P(300<X<700)=P(-1.67<Z<1)=P(Z<1)-P(Z<-1.67)=$

$P(Z<1)+P(Z<1.67)-1=0.8413+0.9525-1=0.7938$

ד. יש למצוא את ערך העו״ש שעד אליו יש 95% מבעלי החשבונות.

$$P(X\le value)=0.95\Rightarrow P(Z\le\frac{value-550}{150})=0.95$$

$$\frac{value-550}{150}=1.645\Rightarrow value=796.75$$

תשובה 8:

א.

$$P(X<193.3)=P(\frac{X-200}{\sigma}<\frac{193.3-200}{\sigma})=P(Z<\frac{-6.7}{\sigma})=0.25$$

$$\Rightarrow P(Z<\frac{6.7}{\sigma})=0.75\Rightarrow\frac{6.7}{\sigma}=0.675\Rightarrow\sigma=9.926$$

ב. נמצא את ההסתברות שמשקל חבילה יהיה נמוך מ-190g.

$$P(X<190)=P(Z<\frac{190-200}{9.926})=P(Z<-1.01)=$$

$$=[1-\Phi(1.01)]=1-0.8438=0.1562\approx 0.16$$

נסמן ב-Y את מס׳ החבילות שמשקלן נמוך מ- 190g :

$$Y\sim Bin(100,0.16)$$

$$\Downarrow$$

$$V(Y)=npq=100\cdot 0.16\cdot 0.84\approx 13.44$$

תשובה 9:

$X \sim N(60,100)$

א.

$$P(X<40)=P(Z<\frac{40-60}{10}=P(Z<-2)=1-P(Z<2)=1-0.9772=0.0228$$

ב.

$$P(X>85)=1-P(Z\le\frac{85-60}{10})=1-P(Z\le 2.5)=1-0.9938=0.0062$$

ג.

$$[P(X<70)]^2=[P(Z<\frac{70-60}{10}=)]^2=[P(Z<1)]^2=(0.8413)^2=0.7077856$$