

אוניברסיטת בר-אילן, המחלקה למדעי המחשב**אלגברה ליניארית 2 - (89113-01/02/03)****שנה"ל תש"ף, סמסטר ב', מועד ב' - פתרון המבחן**

מרצים: ד"ר מצרי אליהו (89113-01), פרופ' עדין רון (89113-02), ד"ר בק יונתן (89113-03)

שאלה פתוחה (30 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($n \geq 3$) מטריצה ריבועית המקיימת $A^3 = 4A$.

- רשמו את כל האפשרויות עבור הפולינום המינימלי של A . נמקו.
- רשמו את כל האפשרויות עבור $\det A$. נמקו.
- הוכיחו או הפריכו: A ניתנת לליכסון.
- הוכיחו או הפריכו: A הפיכה.
- נתון, בנוסף: A נורמלית. הוכיחו או הפריכו: A בהכרח צמודה לעצמה (הרמיטית).

פתרון

- המטריצה מאפסת את הפולינום $x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$, ולכן הפולינום המינימלי מחלק פולינום זה. האפשרויות הן: $x(x+2)(x-2)$, $x(x+2)$, $x(x-2)$, $x+2$, $x-2$, x .
- לפי הסעיף הקודם, הערכים העצמיים חייבים להיות מתוך הקבוצה $\{0, 2, -2\}$. המטריצה היא מסדר $n \times n$. לכן האפשרויות עבור הדטרמיננטה, שהיא מכפלת הערכים העצמיים, הן: $0, 2^n, -2^n$.
- מסעיף א' נובע שבכל המקרים הפולינום המינימלי מתפרק לגורמים לינאריים שונים. לכן המטריצה ניתנת לליכסון.
- מסעיף ב' נובע שייתכן כי 0 הוא ערך עצמי של המטריצה. לכן היא לא בהכרח הפיכה.
- לפי סעיף ב', כל הערכים העצמיים (המרוכבים) של המטריצה הם ממשיים. אם היא נורמלית, זה אומר שהיא בהכרח צמודה לעצמה.

שאלות רב-ברירתיות (70 נקודות) (התשובה הנכונה צבועה באדום)

1. נתון: $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. במטריצה הנלווית $adj(C)$, האיבר במקום (2,1) הוא

- 0
- 1
- 2
- 3

2. הדטרמיננטה של המטריצה $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ היא

- א. 1
- ב. 2
- ג. -2
- ד. -1

3. יהי $V = \mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הרגילה, ויהי $W = \text{span} \{(0,1,2,3), (2,1,0,3)\}$ תת-מרחב של V . ההטלה הניצבת של הווקטור $v = (1,1,1,1)$ על W היא כפולה של

- א. $(1,1,1,3)$
- ב. $(2,3,4,9)$
- ג. $(2,0,-2,0)$
- ד. $(2,3,1,0)$

4. **(נכון)** מכפלה של מטריצות אוניטריות היא מטריצה אוניטרית.

5. **(לא נכון)** אם מטריצה $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מקיימת $|\det A| = 1$, אז קיימת מטריצה אוניטרית $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ כך ש- U^*AU היא מטריצה אלכסונית.

6. **(לא נכון)** אם A^2 מטריצה לכסינה מעל \mathbb{C} אז A מטריצה לכסינה מעל \mathbb{C} .

7. **(נכון)** אם A מטריצה לכסינה וכל הערכים העצמיים שלה הם 1 או -1, אז מתקיים $A^2 = I$.

8. **(נכון)** תהי A מטריצה ריבועית עם פולינום אופייני $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. אם v וקטור שעבורו $Av = 2w$, אז $w = A^2v - Av$ מקיים: $Aw = 2w$.

9. **(נכון)** תהי $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. השורות (אך לא העמודות) של B הן קבוצה אורתוגונלית ביחס למכפלה הפנימית הרגילה.

10. **(נכון)** אם $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מקיימות $AB = BA$, ו- V_λ הוא המרחב העצמי של A המתאים לערך העצמי λ , אז $B(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.