מבחן בקורס הכנה למתמטיקה לקראת שנת תשפ"ד

מרצה: ד"ר ארז שיינר. תאריך: 21/09/23

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=

<u>שאלה 1</u>: נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x>1 \\ |x| & -1\le x\le 1 \\ x+2 & x<-1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $|f(f(x))|\ge x$

נתחיל מהמקרה הראשון $x>1$. במקרה זה

$$f(x)=x^2$$
$$f(f(x))=f(x^2)$$

כיוון ש $x>1$ גם $x^2>1$ ולכן

$$f(x^2)=(x^2)^2=x^4$$

ולכן

$$|f(f(x))|=|x^4|=x^4$$

סה"כ במקרה זה, בו $x>1$ אי השיוויון נראה כך:

$$x^4\ge x$$
$$x^4-x\ge 0$$
$$x(x^3-1)\ge 0$$

כיוון ש$x>1$ גם $x^3>1$ ולכן $x^3-1>0$
כמובן ש $x>0$
וסה"כ אי השיוויון מתקיים בכל תחום <u>זה</u>.

נעבור לתחום הבא $0\le x\le 1$ בתחום זה

$$f(x)=x$$
$$f(f(x))=x$$
$$|f(f(x))|=x$$

אי השיוויון בתחום זה נראה כך

$$x\ge x$$

והוא מתקיים בכל תחום זה.

<u>סיכום ביניים</u>: עד כה אי השיוויון מתקיים לכל $x\ge 0$, ולא בדקנו עדיין את השליליים.

נשים לב כעת כי לכל $x<0$

$$|f(f(x))|>x$$

ולכן סה"כ אי השיוויון מתקיים תמיד (כי חיובי תמיד גדול משלילי)

<u>שאלה 2</u>: מצאו את כל הפתרונות המרוכבים למשוואה $(iz^2-1)(z^3+1)=0$

מכפלת מרוכבים היא אפס אם ורק אם אחד מהם הוא אפס, ולכן

$$z^3+1=0$$

או

$$iz^2-1=0$$

נפתור את שתי המשוואות בנפרד.

$$z^3=-1$$

נעבור לצורה גאומטרית

$$z^3 = cis(\pi)$$

ולכן שלושת הפתרונות הם

$$z_k = \sqrt[3]{1} cis\left(\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right)$$

עבור $k = 0,1,2$

כעת

$$iz^2 = 1$$

נכפול בצמוד של המקדם של z^2 כלומר ב$-i$ ונקבל

$$z^2 = -i$$

נעבור לצורה גאומטרית

$$z^2 = cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

ולכן הפתרונות הנוספים הם

$$z_k = \sqrt{1} cis\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}\right)$$

עבור $k = 0,1$

סה"כ 5 פתרונות.

<u>שאלה 3:</u>

נביט במישור $x + y - z = 1$ ובישר המאונך למישור זה ועובר בנקודה $(2,2,0)$ ונקרא לו L_1.

נביט במישור $x - 2y + z = 0$ ובישר המאונך למישור זה ועובר בנקודה $(0,3,0)$ ונקרא לו L_2.

מצאו את נקודת החיתוך בין שני הישרים L_1, L_2.

תזכורת: בהנתן מישור $Ax + By + Cz = D$, וקטור המקדמים (A, B, C) הוא בכיוון המאונך למישור.

וקטור המאונך למישור הראשון הוא וקטור המקדמים $(1,1,-1)$

ולכן הצורה הפרמטרית של L_1 היא

$$(2,2,0) + t(1,1,-1)$$

באופן דומה הצורה הפרמטרית של L_2 היא

$$(0,3,0) + t(1,-2,1)$$

נקודת החיתוך בין שני הישרים תהיה בהכרח על שני הישרים (ברור) כלומר קיימים סקלרים t, s לאו דווקא שווים כך שניתן להציג את נקודת החיתוך בשתי דרכים:

$$(2,2,0) + t(1,1,-1) = (0,3,0) + s(1,-2,1)$$

קיבלנו משוואה שהופכת לשלוש משוואות, בכל אחת מן הקואורדינטות

$$2 + t = s$$

$$2 + t = 3 - 2s$$

$$-t = s$$

מהמשוואות הראשונה והשנייה מקבלים כי

$$s = 3 - 2s$$

כלומר $s = 1$ ויחד עם המשוואה השלישית $t = -1$

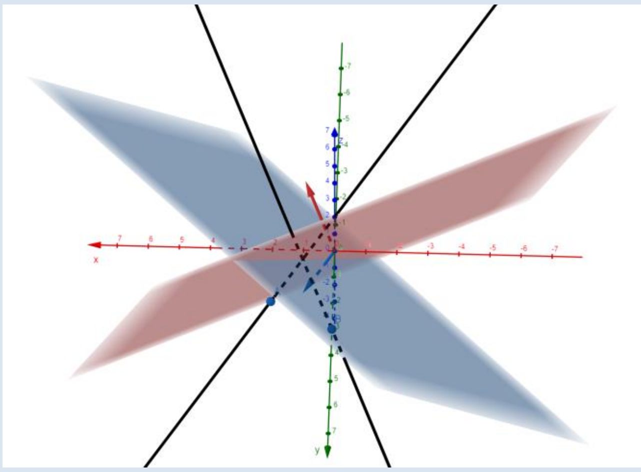
צריך לוודא שאכן t, s הללו מקיימים את שלושת המשוואות.

זה אכן המצב.

אפשר להציב בכל אחת משתי הצורות של נקודת החיתוך על מנת למצוא אותה, נניח נציב בL_2

$$(0,3,0) + 1 \cdot (1,-2,1) = (1,1,1)$$

המחשה "קלה"



שאלה 4:

א. הוכיחו את הטענה הבאה באינדוקציה: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$3^n > n + 1$$

ב. הוכיחו את הטענה הבאה באינדוקציה: לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי

$$3^n > n^2 + n$$

סעיף ראשון:

בדיקה: עבור $n = 1$ אכן מתקיים כי

$$3^1 > 1 + 1 = 2$$

יהי n עבורו $3^n > n + 1$

צ"ל כי $3^{n+1} > (n+1) + 1$

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \overset{\text{הנחת האינדוקציה}}{>} 3 \cdot (n+1) \overset{?}{>} n + 2$$

נבדוק את אי השיוויון מימין

$$3n + 3 > n + 2$$

$$2n > -1$$

אכן מתקיים תמיד בכל הטבעיים ולכן משל.

סעיף ב':

בדיקה עבור $n = 1$ אכן

$$3^1 > 1^2 + 1$$

יהי n עבורו $3^n > n^2 + n$

צ"ל כי $3^{n+1} > (n+1)^2 + (n+1)$

ננסה ראשית ללכת באופן נאיבי באותה שיטה בדיוק כמו סעיף א'

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \overset{\text{ההנחה}}{>} 3 \cdot (n^2 + n) \overset{?}{>} (n+1)^2 + (n+1)$$

$$3n^2+3n \overset{?}{>} n^2+2n+1+n+1$$
$$2n^2>2$$
כיוון ש $n \geq 1$ אזי $n^2 \geq 1$ ולכן $2n^2 \geq 2$ שזה מספיק – מדוע?
$$3^{n+1} > 3(n^2+n) \geq (n+1)^2+(n+1)$$
ולכן סיימנו.

<u>שאלה 5:</u> פתרו את האינטגרל

$$\int\left(\sum_{k=1}^{3} kx^{k-2}\right)dx$$

$$\int\left(\sum_{k=1}^{3} kx^{k-2}\right)dx = \int(1\cdot x^{-1}+2\cdot x^0+3\cdot x^1)dx = \int\left(\frac{1}{x}+2+3x\right)dx = \ln|x|+2x+\frac{3}{2}x^2+C$$

<u>שאלה 6:</u>

<u>הגדרה:</u> תהי X קבוצת קבוצות של מספרים טבעיים. X נקראת <u>מוגזמת</u> אם
$$\forall A\in X \exists B\in X: A \not\subseteq B$$

א. נסחו תנאי השקול לכך ש X אינה מוגזמת.

ב. קבעו **והוכיחו** לכל אחת מן הקבוצות הבאות אם היא מוגזמת או לא:

$X=\{\emptyset,\mathbb{N},\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}\}$ $\quad$ $Y=\big\{\{n+1,n+2\}|n\in\mathbb{N}\big\}$ $\quad$ $Z=\big\{\{1,2,\dots,n\}|n\in\mathbb{N}\big\}$

א. X אינה מוגזמת אם ורק אם
$$\exists A\in X\forall B\in X: A\subseteq B$$

ב.

עבור האוסף X נוכיח כי אינו מוגזם. אכן, קיימת הקבוצה
$$A=\emptyset$$
המוכלת בכל הקבוצות, כלומר לכל $B\in X$ מתקיים כי $A\subseteq B$ (כי הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה).

נעבור לאוסף Y. ראשית עלינו להבין כי Y הוא אוסף של קבוצות בגודל 2, ואפשר לרשום באופן בלתי מדוייק
$$Y=\big\{\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\dots\big\}$$
נדמה שאין קבוצה שמוכלת בכל האחרות, וננסה להוכיח כי Y מוגזמת.

תהי $A\in Y$ צריך לבחור $B\in Y$ כך ש$A\not\subseteq B$

קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש
$$A=\{n+1,n+2\}$$
נבחר
$$B=\{n+2,n+3\}\in Y$$
וכיוון ש $n+1\in A$ אבל $n+1 \notin B$ נובע כי $A\not\subseteq B$ משל.

נעבור לאוסף הבא
$$Z=\big\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\dots\big\}$$
הערה: הכתיב בשאלה של Z אינו מדויק באופן מושלם, אראה לכם מדוע עשיתי זאת
$$Z=\big\{\{1,2,\dots,n\}\mid n\in\mathbb{N}\big\}=\big\{\{k\in\mathbb{N}|\,k\leq n\}\mid n\in\mathbb{N}\big\}$$
נוסח זה טיפה יותר מרושע.

מכאן רואים שהאוסף Z אינו מוגזם כיוון שנבחר

$$A = \{1\} \in Z$$

ואכן לכל $B \in Z$ מתקיים כי $A \subseteq B$:

תהי $B = \{1, \dots, n\}$, אכן $\{1\} \subseteq \{1, \dots, n\}$

<u>שאלה 7:</u> הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \subseteq B$ וכן $B \subseteq C$ אזי $A \setminus C = \emptyset$.

ב. לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \subseteq B \cup C$ אזי $A \setminus B = A \setminus C$.

סעיף א':

נוכיח: תהיינה A, B, C כך ש

$$A \subseteq B$$

וכן

$$B \subseteq C$$

מכאן ניתן להסיק כי

$$A \subseteq C$$

צריך להוכיח כי

$$A \setminus C = \emptyset$$

הערה: כאשר צריך להוכיח שקבוצה ריקה כמעט תמיד ננב"ש (נניח בשלילה).

נב"ש $A \setminus C \neq \emptyset$

לכן קיים

$$x \in A \setminus C$$

ולכן

$$x \in A \wedge x \notin C$$

בסתירה לכך ש $A \subseteq C$.

סעיף ב': נכתוב הפרכה

נשים לב ראשית שאם $B = \emptyset$ אזי הנתון הוא מהצורה

$$A \subseteq C$$

ומה שצריך להוכיח הוא מהצורה

$$A = A \setminus C$$

ומכאן נבחר

$$B = \emptyset$$

$$A = \{1\} = C$$

ואכן הנתון מתקיים

$$A \subseteq B \cup C$$

ואילו מה שצריך להוכיח אינו מתקיים כי

$$A \setminus B \neq A \setminus C$$

שהרי

$$A \setminus B = A \setminus \emptyset = A$$

$$A \setminus C = A \setminus A = \emptyset \neq A$$