# מבוא לטופולוגיה – תרגיל 10 (פתרון)

<u>שאלה 1</u>

יהיו $\tau_1$, $\tau_2$ טופולוגיות על X . ו- $B_1$ -בסיס ל-$(X,\tau_1)$ .
<u>הוכיחו</u> ש- $\tau_2 \subseteq \tau_1$ אם ורק אם $\tau_2 \subseteq B_1$.

<u>פתרון</u>

$\Leftarrow$ .
$\tau_2 \subseteq \tau_1$ אבל $B_1 \subseteq \tau_1$ לפי התנאי. לכן $B_1 \subseteq \tau_2$, מש"ל.
$\Rightarrow$ .
יהי $U \in \tau_1$. אזי $U = \cup_{\alpha\in I} V_\alpha$ כאשר $V_\alpha \in B_1$ לכל $\alpha \in I$,
כי $B_1$- בסיס ל-$(X,\tau_1)$ . אבל לפי ההנחה $B_1 \subseteq \tau_2$. לכן $V_\alpha \in \tau_2$ לכל $\alpha \in I$. אזי $U \in \tau_2$ כאחוד אברי של הטופולוגיה $\tau_2$ . הוכחנו ש-$\tau_2 \subseteq \tau_1$, מש"ל.

<u>שאלה 2</u>

יהיו $X,Y$ מרחבים טופולוגיים, $B_X$ בסיס של $X$ ו- $B_Y$ בסיס של $Y$ . <u>הוכיחו</u> שפונקציה $f\colon X \to Y$ רציפה בנקודה $X \ni x_0$ אם ורק אם לכל סביבה $V \in B_Y$ של הנקודה $f(x_0)$ קיימת סביבה $U \in B_X$ של הנקודה $x_0$ כך ש- $f(U) \subseteq V$.

<u>פתרון</u>

$\Leftarrow$ . תהי $f\colon X \to Y$ רציפה בנקודה $x_0 \in X$.
ותהי $f(x_0) \in V \in B_Y$. כיוון ש-$V$ פתוחה ב-$Y$ ולפי הגדרת רציפות פונקצחה בנקודה, קיימת $U'$ פתוחה ב-$X$ כך ש-$x_0 \in U'$ ו- $f(U') \subseteq V$. אבל מכוון ש- $B_X$ בסיס של $X$, קיימת קבוצה $U \in B_X$ כך ש-$x_0 \in U \subseteq U'$ .

אזי $V \subseteq f(U') \subseteq f(U)$, מז"ל.

$\Leftarrow$ .
ניחש לכל סביבה $V \in B_Y$ של הנקודה $f(x_0)$ קיימת סביבה $U \in B_X$ של הנקודה $x_0$ כך ש- $f(U) \subseteq V$.
נוכיח ש-$f$ רציפה ב-$x_0$.
תהי $V'$ סביבה של $f(x_0)$. אזי קיימת $V \in B_Y$ כך ש-$f(x_0) \in V \subseteq V'$ (כי $B_Y$ בסיס). לכן לפי ההנחה קיימת סביבה $U \in B_X$ של $x_0$ כך ש- $f(U) \subseteq V$. זה גורר $f(U) \subseteq V'$, לכן $f$ רציפה ב-$x_0$ לפי ההגדרה, מז"ל.

<u>שאלה 3</u>
יהיו $X, Y$ מרחבים טופולוגיים. הוכיחו שהמרחבים $X \times Y$ ו- $Y \times X$ הומאומורפיים.

<u>הוכחה</u>
נתבונן בעתקה $i: X \times Y \to Y \times X$ המוגדרת על ידי השוויון: $i(x, y) = (y, x)$ לכל $x \in X$ ו-$y \in Y$. נוכיח ש- $i$ – הומאומורפיזם.
(1) ברור שההעתקה הזאת <u>חח"ע ועל</u>.
(2) $i(U \times V) = V \times U$ פתוחה ב-$Y \times X$ לכל זוג $U, V$ שבתוכו $U \subseteq X$ פתוחה ב-$X$ ו-$V \subseteq Y$ פתוחה ב-$Y$ . אזי $i$ <u>פתוחה</u>.
(3) $i^{-1}(V' \times U') = U' \times V'$ פתוחה ב-$X \times Y$ לכל זוג $U', V'$ שבתוכו $U' \subseteq X$ פתוחה ב-$X$ ו-$V' \subseteq Y$ פתוחה ב-$Y$ . אזי $i$ <u>רציפה</u>.
מ-(1), (2), (3) נובע ש-$i$ הומאומורפיזם, מז"ל.

שאלה 4

יהי $X$ מרחב טופולוגי. הוכיחו ש-$X$ הוא מרחב האוסדורף אך ורק אם התת-קבוצה $\{(x,x) \in X \times X | x \in X\}$ סגורה במרחב המכפלה $X \times X$.

הוכחה

נסמן: $\Delta \coloneqq \{(x,x) \in X \times X | x \in X\}$

יהי $X$ מרחב האוסדורף. נוכיח שהקבוצה $\Delta^c$ פתוחה.

יהי $(a,b) \in \Delta^c$. אזי $a \neq b \in X$. לפי תנאי האוסדורף קיימות סביבות $a \in U$ ו-$b \in V$ כך ש- $U \cap V = \emptyset$. אזי הקבוצה $W = U \times V$ פתוחה בתופולוגית המכפלה, מכילה את $(a,b)$

ו- $U \cap V = \emptyset \Leftarrow W \cap \Delta = \emptyset \Leftarrow W \subseteq \Delta^c$.

לכן $(a,b)$ נקודה פנימית של $\Delta^c$ . אזי $\Delta^c$ פתוחה ו-$\Delta$ סגורה, מש"ל.

תהי $\Delta$ סגורה. אזי $\Delta^c$ פתוחה.

יהיו $a \neq b \in X$. אזי $(a,b) \in \Delta^c$. אזי קיימת סביבה $W \ni (a,b)$ מבסיס של תופולוגית המכפלה ב- $X \times X$ כך ש-$W \subseteq \Delta^c$ . $W$ - איבר הבסיס, לכן $W = U \times V$ כאשר $U,V$ פתוחות ב-$X$. בנוסף:

$U \times V \ni (a,b) \Leftarrow a \in U$ ו-$b \in V$.

$\Delta^c \supseteq U \times V \Leftarrow U \cap V = \emptyset$, אז $X$ מרחב האוסדורף, מש"ל.

שאלה 5

יהיו $X,Y$ מרחבים טופולוגיים ו-$Y$ מרחב האוסדורף. תהא $f: X \to Y$ פונקציה רציפה. הוכיחו ש-$\{(x,y) \in X \times Y | y = f(x)\}$ קבוצה סגורה במרחב המכפלה $X \times Y$.

הוכחה

נסמן: $\Gamma \coloneqq \{(x,y) \in X \times Y | y = f(x)\}$

נוכיח שהקבוצה $\Gamma^c$ פתוחה.

יהי $(a,b) \in \Gamma^c$. אזי $f(a) \neq b$. לפי תנאי האוסדורף ב-$Y$ קיימות סביבות $V_1$ של $f(a)$ ו-$V_2$ של $b$ כך ש-$V_1 \cap V_2 = \emptyset$. מכוון ש-$f$ רציפה בנקודה $a$, קיימת סביבה $a \in U \subseteq X$ כך ש- $f(U) \subseteq V_1$.

לכן $f(U) \cap V_2 = \emptyset$ ואז $U \times V_2 \cap \Gamma = \emptyset$ ולכן $\Gamma^c \supseteq U \times V_2 \ni (a,b)$. אבל $U \times V_2$ היא קבוצה פתוחה במרחב המכפלה ואז קיבלנו ש-$(a,b)$ נקודה פנימית של $\Gamma^c$. כך הוכחנו ש-$\Gamma^c$ פתוחה $\Leftarrow$ $\Gamma$ סגורה, מש"ל.