$\det(v_1, v_2)$: של

תרגול 14 דטרמיננטות (רק לפי תמורות)

הגדרה: תמורה היא פונקציה חח"ע ועל

$$\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$$

יש 2 צורות הצגה:

הצגה של מחזורים	הצגה של פונק'
$(1, \sigma(1), \sigma(\sigma(1)), \dots, \sigma^k(1))$	$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 & \dots, & n \\ \sigma(1), & \sigma(2), & \sigma(3), & \dots, & \sigma(n) \end{pmatrix}$

נסמן: S_n אוסף התמורות על n איברים.

דוג': דוג' לתמורה ב-S_6:

הצגה של מחזורים זרים	הצגה של פונק'
$(1,5,3)(2,6)(4)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

הערה! לא חובה לרשום את 4 כי הוא הולך לעצמו

ניתן לראות שהם זרים!

הערה: ב-S_n יש $n!$ תמורות.

תרגיל: מצא את התמורות ב-S_3 והראה ב-2 ההצגות

הצגה של מחזור	הצגה של פונק'
$(1)(2)(3)$	$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$(1)(2,3)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$(1,2)(3)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$(1,2,3)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$(1,3,2)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$(1,3)(2)$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

לא אותו דבר!!

תמורה זאת $(1,2,3) = (2,3,1)$

להבהיר!

② המשך

הרכבה: $f\circ g = f(g)$ ולכן $\sigma\circ\tau = \sigma(\tau)$

דוג: ① $(1,2)\circ(1,3,2) = (1\ 3)(2)$

② ב-S_7: $\sigma=(1,5,2,7)(3,4,6)$

$\tau=(2,4,5,3)(6,7,1)$

$\sigma\circ\tau = (1,5,2,7)(3,4,6)\circ(2,4,5,3)(6,7,1) = (1,3,7,5,4,2,6)$

$\tau\circ\sigma = (2,4,5,3)(6,7,1)\circ(1,5,2,7)(3,4,6) = (1,3,5,4,7,6,2)$ $\neq$

לכן הרכבת תמורות אינה קומוטטיבית! (/אבלית/חילופית)

טענה: לכל תמורה $\sigma\in S_n$ קיימת $\sigma^{-1}\in S_n$ כך ש- $\sigma\circ\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\circ\sigma=id$. (כי חח"ע ועל)

דוג: ① $\sigma=(1,3,2)\in S_3 \underset{\text{להסביר}}{\Rightarrow} \sigma^{-1}=(1,2,3) = (3,1,2)$

② $\sigma=\sigma^{-1}=(1,2)$

היפוך סדר בתמורה: זה כאשר יש מצב ש- $i<j$ אבל $\sigma(i)>\sigma(j)$

דוג: בתמורה $(1,2,3)$ ישנם 2 היפוכי סדר כי:

I $1<3$ אבל $\sigma(1)>\sigma(3)$ (2, 1)

II $2<3$ אבל $\sigma(2)>\sigma(3)$ (3, 1)

במקום לבדוק את כל האפשרויות ל- i, j ולראות האם זה היפוך סדר או לא... אז יש "טריק":

נרשום את התמורה כהצגה של פונק

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

ונחבר בקווים בין כל שני מס' זהים. מס' ה- * שנקבל זה מס' חילופי הסדר בתמורה.

דוג׳: (1)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^1 = -1$$

סימן: $h(\sigma) =$ מס׳ היפוכי הסדר בתמורה σ

הגדרה: $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{h(\sigma)}$

(2)
$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^3 = -1$$

(3)
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^2 = 1$$

לתמורה בעלת $\mathrm{sign}=1$ נקרא "זוגית"

תמורה בעלת $\mathrm{sign}=-1$ נקרא "אי-זוגית"

משפט: (1) לכל τ מחזור באורך k מתקיים $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{k-1}$

(2) לכל שתי תמורות σ, τ

$$\mathrm{sign}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\tau)$$

כפל!!

המשך לדוג׳:

מהדוג׳ הקודמות

$$\mathrm{sign}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (-1) \cdot (-1) = 1$$

הגדרה: לכל $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נגדיר

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

דוגמ׳: (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ב- S_2 יש 2 תמורות

$id = (1)(2) \rightarrow \mathrm{sign} = 1$

$\sigma = (1,2) \rightarrow \mathrm{sign} = -1$

ולכן

$$|A| = 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} - 1 \cdot a_{12} \cdot a_{21} = ad - bc$$

[אם יש קצת זמן להראות את כלל [illegible] ...]

$|A| = ?$ $\qquad A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ תרגיל

פתרון:

התמורות	סימן	$\operatorname{sign}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$
$\sigma_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\operatorname{sign}\sigma_1=1$	$a_{11}a_{22}a_{33}=aei$
$\sigma_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\operatorname{sign}\sigma_2=-1$	$-a_{11}a_{23}a_{32}=-afh$
$\sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\operatorname{sign}\sigma_3=-1$	$-a_{12}a_{21}a_{33}=-bdi$
$\sigma_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\operatorname{sign}\sigma_4=1$	$a_{12}a_{23}a_{31}=bfg$
$\sigma_5=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\operatorname{sign}\sigma_5=1$	$a_{13}a_{21}a_{32}=cdh$
$\sigma_6=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\operatorname{sign}\sigma_6=-1$	$-a_{13}a_{22}a_{31}=-ceg$

$\Leftarrow$

$$|A| = \det A = aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi$$

שיטה נוספת: (כדי לבדוק את תשובתך במבחן!)

עבור מטריצה 2x2:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad-bc$$

עבור 3x3: $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

שים ב-⊕ את המכפלות \
וב- ⊖ את המכפלות /

$$\det A = aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi$$

שיטת הדירוג:

משפט: תהי $A \in F^{n\times n}$ משולשת עליונה/תחתונה אזי $|A| =$ מכפלת איברי האלכסון $= a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$

משפט: תהי B מטריצה המתקבלת מ-A ע"י פעולת שורה

אזי: (1) אם B התקבלה מ-A ע"י כפל של אחת השורות בסקלר α

אזי $|A| = \frac{1}{\alpha}|B|$

(2) אם B התקבלה מ-A ע"י החלפת שתי שורות

אזי $|A| = -|B|$

(5)

(6) אם B התקבלה מ- A ע"י הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת 'אז'
$|A| = |B|$

דוג': (1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 16 \\ -3 & -6 & 18 \\ 5 & 12 & 35 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{כי הוצאנו} \\ \frac{1}{2}R_1 \\ -\frac{1}{3}R_2}}{=} 2\cdot(-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -6 \\ 5 & 12 & 35 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-5R_1}}{=} -6\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -14 \\ 0 & -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{R_3-3R_2}{=} -6\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 37 \end{vmatrix} \overset{\text{משולשת}}{=} -6\cdot 1\cdot(-1)\cdot 37 = 222$$

(2) חשב את הדטר'

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & & \vdots \\ 1 & 1 & \alpha & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\underset{R_1+\sum R_i}{=} \begin{vmatrix} \alpha+n-1 & \alpha+n-1 & \cdots & \alpha+n-1 \\ 1 & \alpha & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix} \underset{\frac{1}{\alpha+n-1}R_1}{=} (\alpha+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix} \underset{\substack{R_i-R_1 \\ i\neq 1}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha-1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-1 \end{vmatrix} \underset{\text{משולשת}}{=} (\alpha+n-1)\cdot 1\,(\alpha-1)^{n-1}$$

משפט: A הפיכה $\iff |A| \neq 0$.

כמו הלמה
של המבחן