

פתרון אלגברה לינארית תשפ"ה

סמסטר ב מועד ב

כ"ג באב ה'תשפ"ה, 17/08/2025

הוראות

- מרצים: אריאל ויצמן ותומר באואר.
- מתרגל: גל כהן.
- יש לענות על כל שאלות הבחינה. סך הניקוד הוא 104 נק', לא ניתן לקבל ציון מעל 100.
- אין חומר עזר, מותר מחשבון.
- זמן הבחינה: 3 שעות.
- המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.
- יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

שאלות

1. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיסים לתתי-המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^3$ (5 נק' לכל סעיף):

- i. $N(A)$
- ii. $C(A)$
- iii. $N(A) + C(A)$
- iv. $N(A) \cap C(A)$

פתרון:

נתחיל לדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן:

$$N(A) = sp \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$C(A) = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ניזכר שמתקיים:

$$N(A) + C(A) = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

וצריך לבדוק אם זה בסיס, כלומר אם זה בתל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

קיבלנו שיש חופשי בעמודה השלישית ולכן שני הראשונים בסיס לסכום:

$$N(A) + C(A) = sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = C(A)$$

זאת אומרת:

$$N(A) \subseteq C(A)$$

ולכן

$$N(A) \cap C(A) = N(A)$$

(ב) (10 נק') האם קיימת מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימת: $rank(B^2) < rank(B)$?

פתרון:

מכיון שיש וקטור משותף למרחב העמודות ומרחב האפס יוצא כאן שהדרגה של A יורדת ב-1:

$$rank(A) = 2$$

ולגבי A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$rank(A^2) = 1 < 2 = rank(A)$$

אז אכן יש, ניקח $B = A$.

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (8 נק' לסעיף):

(א) קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ המקיימת את שני התנאים הבאים:

$$T \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i.}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \ker T \quad \text{ii.}$$

הפרכה:

נשים לב:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$T \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T \left(\frac{9}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{9}{4} T \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{9}{4} \left(T \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{9}{4} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq 0$$

ולכן שני התנאים לא יכולים להתקיים יחד

(ב) קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ על.

הוכחה:

(ג) לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים: אם n טבעי אי-זוגי ו- A מטריצה אנטי-סימטרית (כלומר, $A^t = -A$), אז A לא הפיכה.

הוכחה:

לפי דטרמיננטות:

$$|A| = |A^t| = |-A| = (-1)^n |A| = -|A|$$

ולכן

$$2|A| = 0$$

מה שאומר

$$|A| = 0$$

ולכן היא לא הפיכה.

(ד) לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מתקיים: אם בצורה המדורגת של A יש שורת אפסים אז למערכת $Ax = 0$ יש יותר מפתרון אחד.

הפרכה:

ראינו בכיתה באחד השיעורים בסוף הסמסטר.

(ה) הקבוצה

$$S = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \exists \alpha \in \mathbb{R} : A^t = \alpha A\} \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$$

היא תת-מרחב של $\mathbb{R}^{n \times n}$.

הפרכה:

אין סגירות לחיבור, כי αA מסויימת לא אותה אחת של B אחרת.

3. (12 נק') עבור אילו ערכים של $a, b \in \mathbb{R}$ המטריצה A הבאה לכסינה?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & a & ab \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

פתרון:

4. נתבונן במרחב $\mathbb{R}^3$. נתונה הפונקציה:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}x_1x_2 + y_1y_2 + \frac{1}{2}z_1z_2$$

(א) (10 נק') הוכיחו שזוהי מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^3$.

(ב) (12 נק') נתבונן בתת-המרחב $W = \text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$. עבור הוקטור

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

א. לינאריות רכיב ראשון:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 + \alpha a \\ y_1 + \alpha b \\ z_1 + \alpha c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(x_1 + \alpha a)x_2 + (y_1 + \alpha b)y_2 + \frac{1}{2}(z_1 + \alpha c)z_2 = \\ & = \frac{1}{2}x_1x_2 + y_1y_2 + \frac{1}{2}z_1z_2 + \alpha \left(\frac{1}{2}ax_2 + by_2 + \frac{1}{2}cz_2 \right) = \\ & \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle + \alpha \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

סימטריות (כי מעל $\mathbb{R}$):

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}x_1x_2 + y_1y_2 + \frac{1}{2}z_1z_2 =$$

$$\frac{1}{2}x_2x_1 + y_2y_1 + \frac{1}{2}z_2z_1 = \left\langle \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

אי-שליליות:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}x_1^2 + y_1^2 + \frac{1}{2}z_1^2 > 0$$

וכמובן יש שיוויון אם ורק אם $x_1 = y_1 = z_1 = 0$.

ב. תחילה נבחר בסיס או"ג:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

כעת להיטל:

$$\begin{aligned} \pi_W(v) &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \\ &= 0 + \frac{3}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{3}{25} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בהצלחה!