2) הנתונים והסימונים הם כמו בתרגיל הקודם.

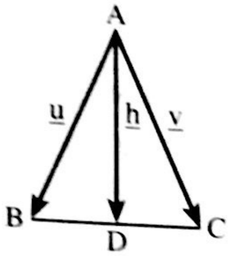
א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הקוסינוסים של הזויות BAD ו-CAD.

ב. הוכח: $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$. נסח במילים את הטענה שהוכחה.

3) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC. נסמן: $\underline{u} = \overrightarrow{BD}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AD}$.

א. הבע את $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{AC}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. הוכח: $\overrightarrow{AB}$ ניצב ל- $\overrightarrow{AC}$ אם ורק אם $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם שווי אורך.



4) AD הוא הגובה לצלע במשולש ABC.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{h}$.

א. הוכח: $\underline{u} \cdot \underline{h} = \underline{v} \cdot \underline{h}$.

ב. הוכח: AD הוא גם חוצה הזוית A אם ורק אם $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם שווי אורך.

5) במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

הוכח את **משפט פיתגורס** ואת המשפט ההפוך לו: המשולש ABC הוא ישר זוית ($\sphericalangle A = 90^\circ$) אם ורק אם $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$.

6) BD הוא התיכון לצלע AC במשולש ABC. נסמן: $\underline{u} = \overrightarrow{BC}$, $\underline{v} = \overrightarrow{BA}$.

א. הבע את $\overrightarrow{AC}$ ואת $\overrightarrow{BD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. הוכח: BD שווה למחצית הצלע AC אם ורק אם $\sphericalangle ABC = 90^\circ$.

ג. נסח במילים את שתי הטענות שהוכחת.

7) במקבילית ABCD נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$.

א. הבע את האלכסונים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{BD}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

ב. הוכח: אם האלכסונים שווים זה לזה אז המקבילית היא מלבן.

ג. הוכח: האלכסונים ניצבים זה לזה אם ורק אם המקבילית היא מעוין.

ד. הוכח: האלכסונים שווים זה לזה וניצבים זה לזה אם ורק אם המקבילית היא ריבוע.

8) הוכח: סכום ריבועי הצלעות במקבילית שווה לסכום ריבועי האלכסונים.

9) הוכח: בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

($\overrightarrow{AB}$ ... , $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{w}$).

10) במשולש ABC נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$. הנקודה M מקיימת $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$,
הנקודה N מקיימת $\overrightarrow{AN} = s\overrightarrow{AC}$. הנקודה K היא אמצע MN.

א. הבע את $\overrightarrow{MN}$ ו-$\overrightarrow{AK}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, t ו-s.

ב. הוכח: אם $|\underline{v}| = |\underline{u}|$ ו-$\overrightarrow{MN}$ ניצב ל-$\overrightarrow{AK}$ אז $s = t$ או $s = -t$.

ג. הסבר היכן נמצאות הנקודות M ו-N בתנאים של סעיף ב' כאשר $0 < t < 1$ ו-$s = -t$)

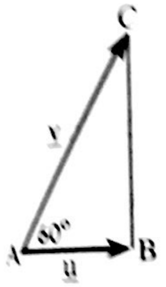
11) במשולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$ הנקודה D מקיימת $\overrightarrow{BD} = t\overrightarrow{BC}$.
נסמן: $\overrightarrow{BC} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$.

א. הבע את $\overrightarrow{AC}$ ואת $\overrightarrow{AD}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-t.

ב. הוכח: אם $\overrightarrow{AD}$ ניצב ל-$\overrightarrow{BC}$ אז $t = \frac{1}{2}$. (**הדרכה:** הסתמך על כך שמתקיים $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$).

ג. נסח במילים את הטענה שהוכחת.

12) במשולש ABC נתון: $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 90°$.
נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.



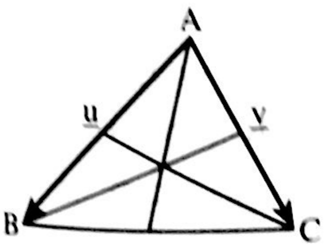
א. הוכח: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \frac{1}{2}|\underline{u}||\underline{v}|$.

ב. הוכח: הניצב AB שווה למחצית היתר AC.
(**הדרכה:** הסתמך על כך ש-$\overrightarrow{BC}$ ניצב ל-$\overrightarrow{AB}$).

13) הוכח: אם במשולש ישר זווית אחד מהניצבים שווה למחצית היתר אז הזווית ביניהם היא בת 60°.

14) הוכח: אם במשולש יש צלע אחת הגדולה פי 2 מצלע שנייה והזווית ביניהן היא 60° אז המשולש הוא ישר זווית.

15) $\underline{m}_a$, $\underline{m}_b$ ו-$\underline{m}_c$ הם בהתאמה וקטורי התיכונים היוצאים מהקודקודים A, B ו-C במשולש ABC. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$,
$\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.



א. הבע את הווקטורים $\underline{m}_a$, $\underline{m}_b$ ו-$\underline{m}_c$ באמצעות $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$.

ב. הוכח: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

(m_a , m_b , m_c אורכי התיכונים. a, b, c אורכי צלעות המשולש).

(40 בטטראדר OABC נסמן $\overrightarrow{OA}=\underline{u}$, $\overrightarrow{OB}=\underline{v}$, $\overrightarrow{OC}=\underline{w}$. CN הוא התיכון ל-AB במשולש ABC. הנקודה M נמצאת על CN ומקיימת $\overrightarrow{CM}=t\overrightarrow{CN}$, $0<t<1$.

א. הבע את $\overrightarrow{OM}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t. א)

ב. נתון: $|\underline{u}|=|\underline{v}|$. הוכח: $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{AB}$ אם ורק אם $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$.

ג. האם הטענה הנ"ל נכונה עבור $t=1$? הסבר.

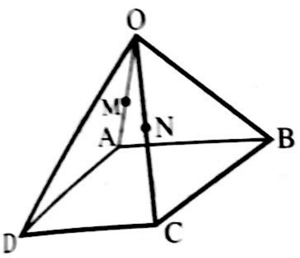
(41 בטטראדר ABCD נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{w}$. הנקודה P היא אמצע AD והנקודה Q מקיימת $\overrightarrow{DQ}=t(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$.

א. הבע את $\overrightarrow{PQ}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t.

ב. מצא מה צריך להיות הערך של t כדי ש-$\overrightarrow{PQ}$ יקביל למישור ABC.

ג. מצא את התנאי שצריכים לקיים הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ כדי ש-$\overrightarrow{PQ}$ יהיה ניצב ל-$\overrightarrow{BC}$ בנוסף להיותו מקביל למישור ABC.

(42 בפירמידה ABCDO הבסיס ABCD הוא מקבילית.



נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AO}=\underline{w}$. הנקודה N נמצאת על OC ומקיימת $\overrightarrow{ON}=t\overrightarrow{OC}$, $0<t<1$. הנקודה M היא אמצע AO.

א. הבע את $\overrightarrow{MN}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t.

ב. הוכח: אם $\overrightarrow{MN}$ מקביל למישור ABCD אז הוא מקביל ל-$\overrightarrow{AC}$.

ג. נתון: $t\neq\frac{1}{2}$, $|\underline{u}|=|\underline{v}|$. הוכח: $\overrightarrow{AO}\perp\overrightarrow{DB}$ אם ורק אם $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{DB}$.

ד. האם הטענה נכונה כאשר $t=\frac{1}{2}$? הסבר.

(43 בטטראדר ABCD נתון: $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ וגם $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}$.
הוכח: $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AC}$ אם ורק אם $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{DC}$. (ראה גם משפט (7) בעמ' 531).

תשובות (הוכחות גיאומטריות בעזרת המכפלה הסקלרית):

(1 א. $\underline{v}-\underline{u}$, $\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$. **(2** א. $=\frac{\underline{u}^2+\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}||\underline{u}+\underline{v}|}$, $\frac{\underline{v}^2+\underline{v}\cdot\underline{u}}{|\underline{v}||\underline{u}+\underline{v}|}$. **(3** א. $\underline{v}-\underline{u}$, $\underline{v}+\underline{u}$.
(6 א. $\underline{u}-\underline{v}$, $\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$. **(7** א. $\underline{u}+\underline{v}$, $\underline{v}-\underline{u}$. **(10** א. $-t\underline{u}+s\underline{v}$, $\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}s\underline{v}$.
ג. M נמצאת על הצלע AB, N נמצאת על המשך הצלע AC מהצד של A. **(11** א. $\underline{u}+\underline{v}$, $\underline{v}+t\underline{u}$. **(15** א. $\frac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$, $\frac{1}{2}(\underline{v}-2\underline{u})$, $\frac{1}{2}(\underline{u}-2\underline{v})$. **(18** א. $\frac{\underline{u}\cdot(\underline{u}-\underline{v})}{|\underline{u}||\underline{u}-\underline{v}|}$, $\frac{\underline{v}\cdot(\underline{v}-\underline{u})}{|\underline{v}||\underline{v}-\underline{u}|}$.
(23 א. $(1-t)\underline{u}-\underline{v}$. **(31** א. $\underline{u}-\underline{v}$, $\underline{w}-\underline{v}$. **(32** א. $\underline{v}-\underline{u}$, $\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$.
(33 א. $\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$, $\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$. ג. $ab\sqrt{b^2-a^2}$. **(36** א. $\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}$. **(37** א. $\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.
(38 א. $\frac{1}{3}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}$. **(40** א. $\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v}+(1-t)\underline{w}$. ג. לא.
(41 א. $t\underline{u}+t\underline{v}+(\frac{1}{2}-2t)\underline{w}$. ב. $\frac{1}{4}$. ג. $|\underline{u}|=|\underline{v}|$. **(42** א. $t\underline{u}+t\underline{v}+(\frac{1}{2}-t)\underline{w}$. ד. לא.