

תרגיל #3

להגשה עד השיעור האחרון של הסמסטר

פירוק SVD (SVD=singular value decomposition) (הכללה של פירוק א"ג)

המטרה של תרגיל זה הוא היכרות עם פירוק SVD. מה זה?
בהינתן מטריצה ממשית $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ רוצים למצוא V, U 2 מטריצות א"ג (כלומר $V^t V = I$ וגם $U^t U = I$), Σ בגודל של A כך $U^t A V = \Sigma$ (כאשר Σ היא מטריצה "כמעט אלכסונית", היא מקיימת $\Sigma_{i,j} = 0$ לכל $i \neq j$).

חלק א

1. טענה: תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ הוכיחו כי $N(A^t A) = N(A)$ או $N(AA^t) = N(A^t)$ ע"י החלפה $A \rightleftharpoons A^t$. [רמז: $\|Ax\|^2 = (Ax)^t Ax$]

2. השתמשו בסעיף הקודם להסיק כי $R(A^t A) = R(A)$ (ואז $R(AA^t) = R(A^t)$ באופן דומה)

3. מסקנה $rank(A^t A) = rank(A) = rank(A^t) = rank(AA^t)$

4. תהא $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ אזי $A^t A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית ולכן לכסינה א"ג. הוכיחו כי הע"ע $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ של $A^t A$ הם אי שליליים. כלומר לכל i מתקיים $0 \leq \lambda_i$. הדרכה: העיזר בחישוב של $v^t (A^t A) v$ כאשר v ו"ע.

5. הוכיחו כי קיים בסיס א"נ של ו"ע $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ של $A^t A$ כך ש

(א) $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ מתאימים לע"ע 0 והם בסיס ל $N(A)$

(ב) $\{v_1, \dots, v_r\}$ מתאימים לא מתאימים לע"ע 0 והם בסיס ל $R(A)$.

6. נסדר את הע"ע של $A^t A$ מהגדול לקטן $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ (וגם את הו"ע בהתאם).
בפרט לכל $r+1 \leq i \leq n$ $\lambda_i = 0$

7. נגדיר $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ לכל $1 \leq i \leq r$. עוד נגדיר לכל $1 \leq i \leq r$ $u_i = \frac{A v_i}{\mu_i}$. הוכח כי $\{u_1, \dots, u_r\}$ בסיס א"נ ל $C(A)$.

8. נשלים לבסיס א"נ של \mathbb{R}^m $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$. הוכח כי הקבוצה $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$ מהווה בסיס א"נ ל $N(A^t)$

חלק ב

נצרך את כל מה הדברים מחלק א

$$1. \text{ נגדיר } \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$(U^t = U^{-1}, V^t = V^{-1} \text{ א"נ } U, V \text{ כיוון ש } V = (v_1 \dots v_n))$

2. נשים לב ש $U^t AV = U^t(Av_1 \dots Av_n)$ ולכן עבור $1 \leq i \leq r$ נקבל כי

$$[U^t AV]_{ij} = \langle \frac{Av_i}{\mu_i}, Av_j \rangle = \frac{1}{\mu_i} v_i^t A^t Av_j = \frac{1}{\mu_i} v_i^t \lambda_j v_j = \frac{1}{\mu_i} \lambda_j v_i^t v_j = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \mu_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ועבור $r + 1 \leq i \leq m$ נקבל כי

$$[U^t AV]_{ij} = \langle u_i, Av_j \rangle = u_i^t Av_j = (A^t u_i)^t v_j = 0^t v_j = 0$$

$$U^t AV = \Sigma \text{ כלומר}$$

לסיכום

$A = U \Sigma V^t$ כאשר $V \in \mathbb{R}^{n \times n}, U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 2 מטריצות א"נ $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ בגודל של A ומתקיים.

1. $R(A)$ בסיס א"נ ל $\{v_1, \dots, v_r\}$

2. $N(A)$ בסיס א"נ ל $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$

3. $C(A)$ בסיס א"נ ל $\{u_1, \dots, u_r\}$

4. $N(A^t)$ מהווה בסיס א"נ ל $\{u_{r+1}, \dots, u_m\}$