בדידה להנדסה־ פתרון תרגיל 5

29 באפריל 2019

1. הוכיחו: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.
פתרון: באינדוקציה.
$n=1$: $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$.
נניח נכונות עבור n ונראה עבור $n+1$.
$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$
$\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}$, כדרוש.

2. פתרון בדף השני.

3. פתרון בדף השני.

4. תהי A קבוצה סופית. הוכח:
מס' תתי הקבוצות של A בגודל זוגי שווה למס' תתי הקבוצות בגודל אי זוגי.
פתרון: באינדוקציה, על גודל הקבוצה.
$n=1$: $A=\{a\}$, $P(A)=\{\phi,\{a\}\}$, ומס' תתי הקבוצות בגודל זוגי ואי זוגי שווה(אחת מכל סוג).
נניח נכונות עבור n ונראה עבור $n+1$.
לשם הנוחות נסמן את הקבוצה כך: $A_n=\{1,2,...,n-1,n\}$.
כעת: $P(A_{n+1})=P(A_n)\bigcup\{B\cup\{n+1\}\,|B\in P(A_n)\}$.
כלומר, חילקנו את קבוצת החזקה של A_{n+1}לקבוצות המכילות את n וכאלו שאינן מכילות אותו.
לפי הנחת האינדוקציה מס' הקבוצות בגודל זוגי ובגודל אי זוגי ב־ $P(A_n)$ שווה, ולכן גם ב־$\{B\cup\{n+1\}\,|B\in P(A_n)\}$, כיוון שע"י הוספת $n+1$ הזוגיות משתנה, ובסה"כ מס' תתי הקבוצות בגודל זוגי ובגודל אי זוגי ב־ $P(A_{n+1})$ שווה, כדרוש.

5. הוכח: כל מספר טבעי (≤ 2) ניתן להציג כמכפלת מספרים ראשוניים.
פתרון: באינדוקציה שלמה.
באינדוקציה שלמה אנו מניחים שהטענה נכונה עבור כל $k<n$ ומוכיחים עבור n.
$n=2$: 2 ראשוני ולכן הטענה נכונה.
נניח שהטענה נכונה לכל $k<n$. אם n ראשוני הטענה נכונה,
אחרת, יש $2\leq a,b<n$ כך ש $n=a\cdot b$.
לפי הנחת האינדוקציה ניתן להציג את a ו־b כמכפלת ראשוניים:
$a=p_1^{r_1}\cdots p_l^{r_l}$, $b=q_1^{s_1}\cdots q_m^{s_m}$ ולכן $n=q_1^{s_1}\cdots q_m^{s_m}\cdot p_1^{r_1}\cdots p_l^{r_l}$,
כלומר הצגנו את n כמכפלת ראשוניים, כדרוש.