פרק 3

קבוצות

3.1 כללי

קבוצה היא המושג הבסיסי במתמטיקה בעת החדשה, כשם שבעת העתיקה היה זה מושג המספר. קבוצה סופית קל לתאר באמצעות רישום שמות איבריה בין סוגריים מסולסלים, כאשר אין חשיבות למספר הפעמים או לסדר שבו רשומים האיברים.

איברים של קבוצה יכולים להיות קבוצות בפני עצמם, כמו בקבוצה $\{1,7,\{2,5\}\}$ בה יש שלושה איברים: שני מספרים וקבוצה אחת.

1 שייך לקבוצה זו ונסמן $1 \in \{1,7,\{2,5\}\}$.

הקבוצה $\{2,5\}$ גם היא איבר של הקבוצה: $\{2,5\} \in \{1,7,\{2,5\}\}$.

2 אינו נמצא בקבוצה כאיבר בפני עצמו, ולכן $2 \notin \{1,7,\{2,5\}\}$.

שתי קבוצות שוות זו לזו אם יש להן בדיוק אותם איברים, כלומר $A = B$ אם ורק אם לכל x מתקיים $x \in B \iff x \in A$.

קבוצות מרכזיות

הקבוצה הריקה $\{\} = \emptyset$.

קבוצת המספרים הטבעיים: $\{1,2,3,4,\ldots,\} = \mathbb{N}$, ובגרסה מקובלת נוספת $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4,\ldots,\}$.

קבוצת המספרים השלמים: $\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} = \mathbb{Z}$.

קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$, הכוללת בין השאר מספרים כמו $\frac{2}{3}, 1\frac{1}{2}, 3, -\frac{4}{78}$.

קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$, הכוללת את כל המספרים הרציונליים וכן מספרים כגון $\ldots, \sqrt{3}, e, \pi$

וכיצד נבטא למשל את קבוצת המספרים הזוגיים? הנה מספר הצעות:

I. הדרך הטבעית ביותר היא וודאי $\{2,4,6,8,\ldots\}$ אך דרך כזו עשויה שלא להיות חד משמעית מספיק.

II.

$$\{\underbrace{2n}_{\text{צורת האיבר הכללי של הקבוצה}} \mid n \in \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{תחום הריצה של הפרמטר}}\}$$

III. $\{k \in \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{ה"עולם" ממנו מזוקקת הקבוצה}} \mid \underbrace{\exists n \in \mathbb{N} : k = 2n\}}_{\text{התנאי המזוקק}}$ (או בקיצור $\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{k}{2} \in \mathbb{N}\}$)

בעתיד נסמן את קבוצת המספרים הזוגיים בסימון $\mathbb{N}_{\text{even}}$ ואת האי הזוגיים בסימון $\mathbb{N}_{\text{odd}}$

3.1.1 קבוצת כל הקבוצות - הפרדוקס של ראסל

לכאורה, ניתן להגדיר קבוצה אחת S שתהיה "קבוצת כל הקבוצות", ואז ניתן גם להגדיר באופן שהדגמנו זה עתה:

$$T = \{A \in S \mid A \notin A\}$$

לכל קבוצה A יתקיים איפוא $A \in T \leftrightarrow A \notin A$ ובפרט עבור הקבוצה T נקבל כי $T \in T \leftrightarrow T \notin T$. זהו פרדוקס אמיתי שהוצג לראשונה על ידי הפילוסוף והמתמטיקאי ברטרנד ראסל (Russel). בחיפוש אחר מוצא ממנו הונחו כללים ברורים להגדרת קבוצות שאינם מאפשרים הגדרת קבוצות כגון S, אך אלו חורגים מתחום הדיון שלנו, ולא נרחיב בנוגע להם כאן.

3.2 פעולות בוליאניות בקבוצות

פעולה	סימון	הגדרה פורמלית
חיתוך	$\cap$	$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$
איחוד	$\cup$	$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$
משלים	$^{-}$	$x \in \bar{A} \iff x \notin A$
הפרש	$\setminus$	$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B$
הפרש סימטרי	Δ	$x \in A \Delta B \iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

הערה: הגדרת המשלים אינה חד משמעית לחלוטין ותלויה בהגדרת העולם שמסביב לקבוצה.

3.2.1 הוכחת זהויות בקבוצות

על מנת להוכיח זהות כגון

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

יש להראות את שקילות הפסוקים:

$$x \in (A \cup B) \cap C \equiv x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

תוך שימוש בהגדרות של הפעולות הבוליאניות נוכל לפשט את שני האגפים:

$$x \in (A \cup B) \cap C \leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in C \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in C)$$

$$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \cap C) \vee x \in (B \cap C) \leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

וכעת אם נסמן:

$$p\colon x \in A, \quad q\colon x \in B, \quad r\colon x \in C,$$

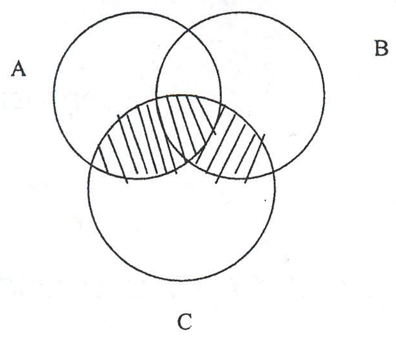
נקבל שעלינו לאמת את השקילות הלוגית

$$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$$

זאת ניתן לעשות באמצעות טבלת אמת:

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

אולם ניתן לדלג על ההליך המייגע הזה ולבצע אותה בדיקה בדיוק ישירות באמצעות **דיאגרמת ואן**, בה מיוצגות אותן 8 אופציות המצויות בשורות טבלת האמת, ב-8 תחומים אליהם מתחלק המישור על ידי 3 מעגלים.



יש עם זאת להזהר משימוש בשיטה זאת כאשר מדובר ביותר מ-3 קבוצות שכן בשל מגבלות גיאומטריות גרידא לא ניתן ליצור למשל בעזרת 4 מעגלים יותר מ-14 מתוך 16 התחומים הנחוצים (ראה תרגיל 1 בפרק 10).

3.3 יחס ההכלה וקבוצת החזקה

נאמר כי קבוצה B **מוכלת** בקבוצה A אם כל איבר של B שייך גם ל-A ונסמן $B \subseteq A$ או $A \supseteq B$.

תכונות יחס ההכלה

א. הקבוצה הריקה $\emptyset$ מוכלת בכל קבוצה A: $\emptyset \subseteq A$. כדי להוכיח זאת, יש לאמת את הפסוק:

$$\forall x\colon x \in \emptyset \rightarrow x \in A$$

אולם $x \in \emptyset$ יהיה תמיד שקר, מכיון שאין אף x בקבוצה הריקה. ולפיכך הגרירה תהיה תמיד אמת.

ב. $A \subseteq A$ לכל קבוצה A (רפלקסיביות).

אם נרצה לאמר כי קבוצה מסוימת B מוכלת ב A, אבל אינה שווה ל-A, נאמר כי הקבוצה B מוכלת **ממש** ב-A, ונסמן $B \subsetneq A$.

ג. אם $A \supseteq B$ וגם $A \subseteq B$, אזי $A = B$ (אנטי-סמטריות חלשה).

ד. אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq C$, אזי $A \subseteq C$ (טרנזטיביות).

אם $A \subseteq B$ אזי B נקראת **תת קבוצה** (או קבוצה חלקית) של A.

הקבוצה שאבריה הם כל תתי הקבוצות של A מסומנת $P(A)$ וקרויה **קבוצת החזקה** של A. זאת משום שעבור A סופית מספר תתי הקבוצות של A הוא 2 בחזקת מספר האברים של A (ראה דוגמא 17 בפרק 7).

למשל בקבוצה הבאה שלושה איברים: $A = \{1, 3, \{4, 1\}\}$ ויש לה 2^3 תתי קבוצות:

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{\{4,1\}\}, \{1,3\}, \{1,\{4,1\}\}, \{3,\{4,1\}\}, \{1,3,\{4,1\}\}\}$$

הערה: בטיפול בקבוצת החזקה בתרגילים כדאי לזכור כי מבחינה פורמלית, $B \in P(A)$ אם ורק אם $B \subseteq A$.

.5

3.4 זוגות סדורים ומכפלה קרטזית

כפי שציינו, סדר האיברים בקבוצה אינו משנה: $\{2,7\}=\{7,2\}$.
בזוג סדור הסדר **חשוב**: $(2,8)\neq(8,2)$.
מתי זוגות סדורים שווים?

$$a=c\wedge b=d\leftrightarrow(a,b)=(c,d)$$

ניתן להגדיר את מושג הזוג הסדור באמצעות סימני הקבוצות בלבד, אך יש לעשות זאת בזהירות (ראה תרגיל 2 בפרק זה).

בהינתן שתי קבוצות, A ו-B, נגדיר את **המכפלה הקרטזית** שלהן:

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A\wedge b\in B\}$$

למשל, אם $A=\{1,2,5\}$, $B=\{2,4\}$, אזי

$$A\times B=\{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(5,2),(5,4)\}$$
$$B\times A=\{(2,1),(2,2),(2,5),(4,1),(4,2),(4,5)\}$$

כפי שניתן לראות, סדר הקבוצות במכפלה **קובע**, שלא כבכפל רגיל. מקור השם "מכפלה", בדומה למקור השם קבוצת החזקה, בכך שמספר האיברים במכפלה הקרטזית של שתי קבוצות סופיות שווה למכפלת מספרי האיברים בשתי הקבוצות. היא נקראת קרטזית על שם הפילוסוף והמתמטיקאי רנה דקרט (DesCartes), מחלוצי הגיאומטריה האנליטית בה מיוצג המישור כ-$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

3.4 זוגות סדורים ומכפלה קרטזית

כפי שציינו, סדר האיברים בקבוצה אינו משנה: $\{2,7\} = \{7,2\}$.

בזוג סדור הסדר **חשוב**: $(2,8) \neq (8,2)$.

מתי זוגות סדורים שווים?

$$a = c \wedge b = d \leftrightarrow (a,b) = (c,d)$$

ניתן להגדיר את מושג הזוג הסדור באמצעות סימני הקבוצות בלבד, אך יש לעשות זאת בזהירות (ראה תרגיל 2 בפרק זה).

בהינתן שתי קבוצות, A ו-B, נגדיר את **המכפלה הקרטזית** שלהן:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

למשל, אם $A = \{1,2,5\}$, $B = \{2,4\}$, אזי

$$A \times B = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(5,2),(5,4)\}$$
$$B \times A = \{(2,1),(2,2),(2,5),(4,1),(4,2),(4,5)\}$$

כפי שניתן לראות, סדר הקבוצות במכפלה **קובע**, שלא כבכפל רגיל. מקור השם "מכפלה", בדומה למקור השם קבוצת החזקה, בכך שמספר האיברים במכפלה הקרטזית של שתי קבוצות סופיות שווה למכפלת מספרי האיברים בשתי הקבוצות. היא נקראת קרטזית על שם הפילוסוף והמתמטיקאי רנה דקרט (DesCartes), מחלוצי הגיאומטריה האנליטית בה מיוצג המישור כ-$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3.5 תרגילים

1. בכל אחד מהזוגות הבאים קבע אם מתקיים בין שתי הקבוצות יחס שייכות $\in$, יחס הכלה $\subseteq$, שניהם או שמא אף אחד מהם:

א. $\emptyset; \{\emptyset\}$ ב. $\{\emptyset\}; \{\{\emptyset\}\}$

ג. $\emptyset; \{\{\emptyset\}\}$ ד. $\emptyset; \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

ה. $\{\emptyset\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ו. $\{\{\emptyset\}\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

פתרון: א. $\in, \subseteq$ ב. $\in$ ג. $\subseteq$ ד. $\in, \subseteq$ ה. $\in, \subseteq$ ו. $\subseteq$

2. הוכח או הפרך כי לכל a, b, c, d מתקיים:

א. $\{\{a\}, b\} = \{\{c\}, d\} \leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$

ב. $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$

פתרון:

א. הטענה אינה נכונה, למשל כאשר $a = 3$, $b = \{7\}$, $c = 7$, $d = \{3\}$, אזי

$$\{\{a\}, b\} = \{\{3\}, \{7\}\} = \{\{7\}, \{3\}\} = \{\{c\}, d\}$$

אולם $a = 3 \neq 7 = c$.

ב. הטענה נכונה. הכיוון $\rightarrow$ ברור. בכיוון השני נפריד לשני מקרים: אם $a \neq b$, אזי וודאי $\{a, b\} \neq \{c\}$, לכן בהכרח $\{a\} = \{c\}$, מכאן $a = c$, וכן $\{a, b\} = \{c, d\}$ ומכיון ש-$a \neq b$ וקיבלנו כבר כי $a = c$ הרי $b \neq c$, ולכן בהכרח $b = d$ כנדרש.

אם $a = b$, אזי $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$, ולכן גם $\{c\} = \{c, d\} = \{a\}$ ומכאן $a = c = d$, כלומר $a = b = c = d$ ובפרט $a = c, b = d$.

3. תאר את $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$ עבור:

א. $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

ב. $A = \mathbb{N}_{\text{even}} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$; $B = \mathbb{N}_{\text{odd}} = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$

ג. $A = [1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$; $B = (3, 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$

פתרון:

א.
$$A \cap B = \{1, 5, 7\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\},$$
$$A \setminus B = \{2, 4, 8, 10\}, \quad A \Delta B = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$$

ב. $A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = \mathbb{N}, \quad A \setminus B = \mathbb{N}\text{even}, \quad A\Delta B = \mathbb{N}$

ג. $A \cap B = (3,4], \quad A \cup B = [1,5), \quad A \setminus B = [1,3], \quad A\Delta B = [1,3] \cup (4,5)$

4. בכל אחד מהזוגות הבאים קבע האם מתקיים תמיד שוויון בין שני האגפים, ואם לא, האם מתקיימת תמיד הכלה בכיוון מסוים:

א. $(A \setminus B) \setminus C \quad ; A \setminus (B \setminus C)$ ב. $(A\Delta B)\Delta C \quad ; A\Delta(B\Delta C)$

ג. $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \quad ; (A \cup B) \setminus C$ ד. $(A\Delta C) \cup (B\Delta C) \quad ; (A \cup B)\Delta C$

ה. $(A\Delta B) \cup (B\Delta C) \quad ; A\Delta C$ ו. $A\Delta C \quad ; (A\Delta B) \cap (B\Delta C)$

פתרון: א. $\supseteq$ ב. $=$ ג. $=$ ד. $\subseteq$ ה. $\subseteq$ ו. אין הכלה בשום כיוון.

5. הוכח או הפרך:

א. $A \cap C = B \cap C \iff A = B$ ב. $A \cup C = B \cup C \iff A = B$

ג. $A\Delta C = B\Delta C \iff A = B$ ד. $A \cup C = B \cap C \iff A \subseteq C \subseteq B$

פתרון:

א. לא נכון, למשל כאשר $A = \{1\}$, $B = \emptyset$, $C = \emptyset$.

ב. לא נכון, למשל כאשר $A = \{1\}$, $B = \emptyset$, $C = \{1\}$.

ג. נכון. הכיוון $\rightarrow$ ברור ואילו אם $A\Delta C = B\Delta C$, אזי גם

$$(A\Delta C)\Delta C = (B\Delta C)\Delta C$$

אבל לכל קבוצה S מתקיים (לפי סעיף ב. בתרגיל הקודם)

$$(S\Delta C)\Delta C = S\Delta(C\Delta C) = S\Delta\emptyset = S$$

וקבלנו כי $A = B$.

ד. נכון. אם $A \subseteq C \subseteq B$ הרי $A \cup C = C = B \cap C$

ואילו אם $A \cup C = B \cap C$, הרי

$$A \subseteq A \cup C = B \cap C \subseteq C, \quad C \subseteq A \cup C = B \cap C \subseteq B$$

6. הוכח או הפרך כי לכל שתי קבוצות A, B מתקיים:

א. $A \subseteq B \Leftarrow P(A) \subseteq P(B)$
ב. $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$
ג. $A \in B \Leftarrow P(A) \in P(B)$
ד. $P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$
ה. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$
ו. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$
ז. $P(A \Delta B) = P(A) \Delta P(B)$

פתרון:

א. נכון, כי אם $A \subseteq B$ הרי לכל S מתקיים לפי טרנזיטיביות יחס ההכלה:

$$S \in P(A) \leftrightarrow S \subseteq A \rightarrow S \subseteq B \leftrightarrow S \in P(B)$$

ב. נכון, כי הרי $A \in P(A)$ ואז אם $P(A) \subseteq P(B)$, נקבל כי גם $A \in P(B)$, כלומר $A \subseteq B$.

ג. לא נכון, למשל כאשר $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$.

ד. נכון, כי אם $P(A) \in P(B)$, כלומר $P(A) \subseteq B$, אזי מכיון ש-$A \in P(A)$ הרי גם $A \in B$.

ה. נכון, כי לכל קבוצה S:

אם $S \subseteq B$ וגם $S \subseteq A$ אז לכל $x \in S$ הרי $x \in B$ וגם $x \in A$ כלומר $x \in A \cap B$ ולכן $S \subseteq A \cap B$.

מצד שני, אם $S \subseteq A \cap B$ אזי כיוון ש $A \cap B \subseteq B$ וגם $A \cap B \subseteq A$ נובע מטרנזיטיביות ההכלה כי $S \subseteq B$ וגם $S \subseteq A$. לסיכום,

$$S \subseteq A \cap B \leftrightarrow (S \subseteq A \wedge S \subseteq B)$$

כלומר

$$S \in P(A \cap B) \leftrightarrow S \in P(A) \cap P(B)$$

כנדרש.

ו. לא נכון, למשל כאשר $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.

ז. לא נכון (לאף שתי קבוצות), כי תמיד $\emptyset \in P(A \Delta B)$ אבל $\emptyset \notin P(A) \Delta P(B)$.

7. מצא קבוצה A בת שלושה איברים כך שב-$A \cap P(A)$ יש:

א. איבר אחד בדיוק. ב. בדיוק שני איברים. ג. בדיוק שלושה איברים.

פתרון: למשל א. $\{1,2,\{2\}\}$ ב. $\{\emptyset,2,\{2\}\}$ ג. $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$

8. הוכח כי:

א. $A \times A = B \times B \iff A = B$

ב. $A \times B = B \times A \iff [A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B]$

ג. $(A \times A) \cup (B \times B) = C \times C \iff [B \subseteq A = C \vee A \subseteq B = C]$

ד. $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C \iff [A = C = \emptyset \vee B = C = \emptyset \vee A = B = C]$

פתרון:

א. הכיוון $\rightarrow$ ברור. $\leftarrow$: נניח כי $A \times A = B \times B$ ואז

$$x \in A \leftrightarrow (x,x) \in A \times A \leftrightarrow (x,x) \in B \times B \leftrightarrow x \in B$$

ואם כן $A = B$.

ב. $\rightarrow$: אם $A = B$, ברור ואם $A = \emptyset$ או $B = \emptyset$, הרי $A \times B = \emptyset = B \times A$.

$\leftarrow$: נניח כי $A \times B = B \times A$ וכן $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. אזי יש $a \in A$, $b \in B$ ואז

$$x \in A \leftrightarrow (x,b) \in A \times B \leftrightarrow (x,b) \in B \times A \rightarrow x \in B$$

כלומר $A \subseteq B$, וכן

$$y \in B \leftrightarrow (a,y) \in A \times B \leftrightarrow (a,y) \in B \times A \rightarrow y \in A$$

כלומר $B \subseteq A$ ולסיכום $A = B$.

ג. $\rightarrow$ ברור. $\leftarrow$: נניח כי $(A \times A) \cup (B \times B) = C \times C$ אז

$B \times B \subseteq C \times C$, $A \times A \subseteq C \times C$ ומכאן נקבל כמו בסעיף א. כי

$B \subseteq C$, $A \subseteq C$.

נניח בשלילה שבאף אחת מההכלות לא מתקיים שוויון.

אזי היו קיימים $\alpha, \beta \in C$ כך ש-$\beta \notin B$, $\alpha \notin A$ ואז היה מתקיים

$(\alpha,\beta) \in C \times C$, אבל $(\alpha,\beta) \notin (A \times A) \cup (B \times B)$, סתירה.

ד. $\rightarrow$ ברור. $\leftarrow$: נניח כי $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$.

ברור כי אם A או B ריקות אזי גם C ריקה.

נניח כי $A \neq \emptyset$. אזי קיים $a \in A$ ואז

$$x \in B \rightarrow (a, x) \in A \times B \rightarrow (a, x) \in C \times C \rightarrow x \in C$$

כלומר $B \subseteq C$. כעת, אילו היתה זו הכלה ממש, היה קיים $\beta \in C$ כך ש-$\beta \notin B$ ואז היה מתקיים $(\beta, \beta) \in (C \times C)$, אבל

$$(\beta, \beta) \notin (A \times B) \cup (B \times A)$$

לפיכך, אם $A \neq \emptyset$, אזי $B = C$ ובדומה, אם $B \neq \emptyset$, אזי $A = C$. אם כן, אם גם A וגם B אינן ריקות הרי ש-$A = B = C$, כנדרש.