פרק 3

קבוצות

3.1 כללי

קבוצה היא המושג הבסיסי במתמטיקה בעת החדשה, כשם שבעת העתיקה היה זה מושג המספר.
קבוצה סופית קל לתאר באמצעות רישום שמות איבריה בין סוגריים מסולסלים, כאשר אין חשיבות למספר הפעמים או לסדר שבו רשומים האיברים.

איברים של קבוצה יכולים להיות קבוצות בפני עצמם, כמו בקבוצה $\{1,7,\{2,5\}\}$ בה יש שלושה איברים: שני מספרים וקבוצה אחת.

1 שייך לקבוצה זו ונסמן $1 \in \{1,7,\{2,5\}\}$.

הקבוצה $\{2,5\}$ גם היא איבר של הקבוצה: $\{2,5\} \in \{1,7,\{2,5\}\}$.

2 אינו נמצא בקבוצה כאיבר בפני עצמו, ולכן $2 \notin \{1,7,\{2,5\}\}$.

שתי קבוצות שוות זו לזו אם יש להן בדיוק אותם איברים, כלומר $A = B$ אם ורק אם לכל x מתקיים $x \in A \iff x \in B$.

קבוצות מרכזיות

הקבוצה הריקה $\emptyset = \{\}$.

קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,\ldots,\}$, ובגרסה מקובלת נוספת $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,4,\ldots,\}$.

קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$.

קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$, הכוללת בין השאר מספרים כמו $\frac{2}{3}, 1\frac{1}{2}, 3, -\frac{4}{78}$.

קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$, הכוללת את כל המספרים הרציונליים וכן מספרים כגון $\pi, e, \sqrt{3}, \ldots$

וכיצד נבטא למשל את קבוצת המספרים הזוגיים? הנה מספר הצעות:

I. הדרך הטבעית ביותר היא וודאי $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ אך דרך כזו עשויה שלא להיות חד משמעית מספיק.

II.

$$\{\underbrace{2n}_{\text{צורת האיבר הכללי של הקבוצה}} \mid n \in \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{תחום הריצה של הפרמטר}}\}$$

III. $\{k \in \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{ה"עולם" ממנו מזוקקת הקבוצה}} \mid \underbrace{\exists n \in \mathbb{N} : k = 2n}_{\text{התנאי המזוקק}}\}$ (או בקיצור $\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{k}{2} \in \mathbb{N}\}$)

בעתיד נסמן את קבוצת המספרים הזוגיים בסימון $\mathbb{N}_{\text{even}}$ ואת האי הזוגיים בסימון $\mathbb{N}_{\text{odd}}$

3.1.1 קבוצת כל הקבוצות - הפרדוקס של ראסל

לכאורה, ניתן להגדיר קבוצה אחת S שתהיה "קבוצת כל הקבוצות", ואז ניתן גם להגדיר באופן שהדגמנו זה עתה:

$$T = \{A \in S \mid A \notin A\}$$

לכל קבוצה A יתקיים איפוא $A \in T \leftrightarrow A \notin A$ ובפרט עבור הקבוצה T נקבל כי $T \in T \leftrightarrow T \notin T$. זהו פרדוקס אמיתי שהוצג לראשונה על ידי הפילוסוף והמתמטיקאי ברטרנד ראסל (Russel). בחיפוש אחר מוצא ממנו הונחו כללים ברורים להגדרת קבוצות שאינם מאפשרים הגדרת קבוצות כגון S, אך אלו חורגים מתחום הדיון שלנו, ולא נרחיב בנוגע להם כאן.