

# 88132) חשבון אינפיניטסימלי 1 | מבחן תשע"ו מועד ב'

הצעת פתרון | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

## שאלה 1

- א. נסח והוכח את מבחן העיבוי להתכנסות טורים חיוביים.  
ב. הוכח, או הפרך על ידי דוגמא נגדית, את ההכללה הבאה של מבחן העיבוי:  
תהי  $a_n$  סידרה חיובית יורדת.  
תהי  $m_n$  סידרה עולה ממש של מספרים טבעיים, כך שלכל  $n$  מתקיים  $2^n \leq m_n$ .  
אזי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  והטור  $\sum_{n=1}^{\infty} m_n \cdot a_{m_n}$  מתכנסים ומתבדרים יחד.

## סעיף א

- תהי  $a_n \searrow 0$  אזי  
(1) מתכנס  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$   
(2) שאריות הטור מקיימות  $|r_k| \leq a_{k+1}$  (כלומר  $S_k - a_{k+1} \leq S \leq S_k + a_{k+1}$ )  
הוכחה  
(1) לכל  $k$ , מתקיים

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2k-1} - a_{2k})$$

$$S_{2(k+1)} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2k-1} - a_{2k}) + (a_{2k+1} - a_{2k+2})$$

- נשים לב שמירידתה של הסדרה, מתקיים שכל הסכומים בסוגריים הם חיוביים, בפרט  $a_{2k+1} - a_{2k+2}$  ולכן  $S_{2(k+1)} \geq S_{2k}$   
כלומר  $(S_{2k})_{k=1}^{\infty}$  סדרה עולה ומצד שני, אפשר להסתכל על  $S_{2k}$  גם כך

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}$$

- כעת הסכומים שאנחנו מחסירים חיוביים, וגם  $a_{2k} > 0$ , כך הכל הסדרה חסומה מלעיל, ולכן מתכנסת  $S := \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}$   
כעת,  $S_{2k-1} = S_{2k} - a_{2k} \rightarrow S - 0 = S$   
לסיכום  $S_{2k}, S_{2k-1} \rightarrow S$  ולכן  $S_k \rightarrow S$ , כלומר  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = S$  קיים.  
(2) יהי  $k$  נסתכל בטור על הזנב  $r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ,  
עבור  $k$  אי-זוגי נקבל מקרה פרטי של מה שהוכחנו כי  $a_{k+1} \geq a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} = r_k \geq 0$

עבור  $k$  זוגי  $r_k = -a_{k+1} + a_{k+2} - \dots = -(a_{k+1} - a_{k+2} + \dots)$   
 כעת  $-a_{k+1} \leq r_k \leq 0$  , לכן  $0 \leq a_{k+1} - a_{k+2} + \dots \leq a_{k+1}$   
 סך הכל  $|r_k| \leq a_{k+1}$  לכל  $k$ , כלומר  $S_k - a_{k+1} \leq S \leq S_k + a_{k+1}$  ולכן סיימנו.

## סעיף ב

אם ניקח  $m_n := 2^{(2^n)}$  ונראה שהטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)} = \infty$   
 אבל נייעור בטור ההנדסי לקבלת

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{(2^n)}}{2^{2^n} \log(2^{2^n})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(2)} \cdot \frac{1}{2^n} < \infty$$

וקיבלנו אחד מתבדר והשני מתכנס, ולכן לא מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

## שאלה 2

א. תהי  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  סידרה המוגדרת בעזרת נוסחת הנסיגה הבאה:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3}, n, \text{ ולכל מספר טבעי } n, a_1 = 1$$

קבע האם הסידרה  $a_n$  מתכנסת (במובן הצר) או לא.

ב. מצא את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right)$$

## סעיף א

נראה שהסדרה לא מתכנסת, נניח בשלילה שהיא כן, ונסמן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

ואז מתקיים

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$$

ונשים לב שקיבלנו

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n + \frac{1}{a_n^3} \right) = L$$

אם  $L \neq 0$  מחשבון גבולות

$$L + \frac{1}{L^3} = L$$

$$\frac{1}{L^3} = 0$$

בסתירה.

ונראה גם שלא יכול להתקיים  $L = 0$  משום ש  $\forall n \in \mathbb{N} a_n \geq 1$  באינדוקציה:

$$a_1 = 1 \geq 1 \text{ מתקיים: בסיס:}$$

צעד האינדוקציה: נניח  $a_n \geq 1$ , נראה כי  $a_{n+1} \geq 1$

$$\text{ואכן } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3} \geq 1 + \frac{1}{a_n^3} \geq 1$$

## סעיף ב

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan(x) - x}{x \cdot \tan(x)} \right)$$

ולפי לופיטל במקרה  $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}{\tan(x) + \frac{x}{\cos^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)}}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{x}{\cos^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{\sin(x) \cdot \cos(x) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{0.5\sin(2x) + x}$$

שוב לופיטל

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\cos(2x) + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

### שאלה 3

א. יהי  $b$  מספר ממשי. הגדר את המונח " $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ ".

ב. תזכורת: פונקציה נקראת פחזורית אם קיים מספר ממשי חיובי  $c$  ("מחזור") כך שלכל  $x$  מתקיים  $f(x+c) = f(x)$ .

הוכח, או הפרך על ידי דוגמא נגדית, את הטענה הבאה: אם  $f$  הינה פונקציה מחזורית שמוגדרת בקרן  $(0, \infty)$  והגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  קיים וממשי, אזי קיים מספר ממשי חיובי  $a$  כך שהפונקציה  $f$  קבועה בקרן  $(a, \infty)$ .

### סעיף א

לכל  $\epsilon > 0$  קיים  $M > 0$  כך שלכל  $x > M$  מתקיים  $|f(x) - b| < \epsilon$

### סעיף ב

הוכחה תהי  $f$  פונקציה מחזורית המוגדרת בקרן  $(0, \infty)$  ואכן קיים הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ .  
נניח בשלילה שהיא לא קבועה בקטע  $(a, \infty)$ .

כלומר קיימות לכל  $a \in \mathbb{R}$  קיימים  $x_1, x_2 > a$  כך ש  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . כעת ניקח שתי סדרות  $a_n := x_1 + cn, b_n := x_2 + cn$  ולפי לשון היינה מתקיים

$$f(a_n) \rightarrow L$$

אבל ממחזוריות  $f(a_n) = x_1 \rightarrow x_1$ , מיחידות הגבול  $L = x_1$   
ובדומה עבור  $b_n$ , מקבלים  $L = x_2$   
מקבלים סך הכל  $x_1 = x_2$  בסתירה.

#### שאלה 4

- א. תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$ . הגדר את המינוח "הפונקציה  $f$  רציפה במידה שווה בתחום  $A$ ".
- ב. תהי פונקציה רציפה במידה שווה בקרן  $(0, \infty)$ , המקיימת  $1 < f(x)$  לכל  $x \in (0, \infty)$ . הוכח שהפונקציה  $\sqrt{f(x)}$  רציפה במידה שווה בקרן  $(0, \infty)$ .

#### סעיף א

פונקציה  $f$  רציפה במידה שווה בתחום  $A$  אם  $A \subseteq \text{dom}(f)$ , ולכל  $\epsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך שמתקיים לכל  $x_1, x_2 \in A$  המקיימים  $|x_1 - x_2| \leq \delta$  כי  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$  (כתבתי את אחת ההגדרות השקולות שיהיה לנו נוח לעבוד איתה)

#### סעיף ב

ב) יהי  $\epsilon > 0$  ניקח את  $\delta' > 0$  המתאים מבחינת הרציפות במידה שווה של  $f(x)$  ונראה שמתקיים מה שצריך. נבחר  $\delta := \delta'$ , יהיו  $x_1, x_2 \in (0, \infty)$  המקיימים  $|x_1 - x_2| \leq \delta$  כעת נראה כי  $|\sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)}| \leq \epsilon$

$$\begin{aligned} |\sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)}| &= |\sqrt{f(x_1)} - \sqrt{f(x_2)}| \cdot \frac{|\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)}|}{|\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)}|} \\ &= \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|\sqrt{f(x_1)} + \sqrt{f(x_2)}|} \leq \frac{\epsilon}{|\sqrt{1} + \sqrt{1}|} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \end{aligned}$$

## שאלה 5

יהי  $0 < a$  מספר ממשי. נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{x^2+4x} & x < 0 \\ x^a + \frac{1}{a} & x \geq 0 \end{cases}$$

קבע לאילו ערכים  $0 < a$  הפונקציה  $f$  רציפה בקרן  $(-4, \infty)$ .

נמצא לאלה ערכי  $a > 0$  יתקיים כי היא רציפה ב $(-4, \infty)$  כלומר רק בנק'  $-4, 0$ . משום שבכל שאר הנקודות הפונקציה רציפה כפונקציה אלמנטרית ובתחום ההגדרה. צריך למצוא  $a$  כך ש

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

נחשב  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$   
מלופיטל

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ae^{ax}}{2x+4} = \frac{a \cdot 1}{4} = \frac{a}{4}$$

כעת

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^a + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}$$

ומתקיים גם

$$f(0) = \frac{1}{a}$$

סך הכל מקבלים את המשוואה

$$\frac{1}{a} = \frac{4}{a}$$

$$a = 4$$

וסיימנו (פורמלית צריך להוכיח שכעת היא רציפה, אבל דאגנו לתנאי הזה).