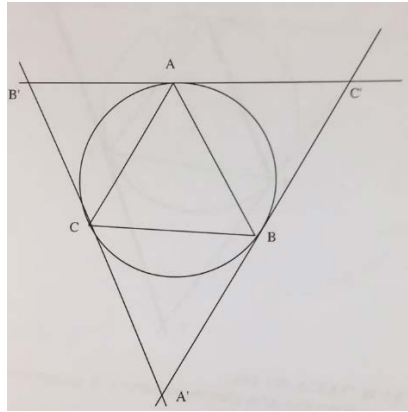


פתרון תרגיל 5 , גיאומטריה אוקלידית, זהבית צבי

שאלה 1

נתבונן באיור הבא:



הוכיחו: AA', BB', CC' קונקורנטיים.

הוכחה

נפעיל את משפט צ'בה ל- $\Delta A'B'C'$:

על-מנת ש- AA', BB', CC' יהיו קונקורנטיים צריך להתקיים:

$$\frac{B'C}{CA'} \cdot \frac{A'B}{BC'} \cdot \frac{C'A}{AB'} = 1 \quad (*)$$

כיוון ש- $C'B', A'B', C'A'$ משיקים – שני משיקים למעגל שיוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה

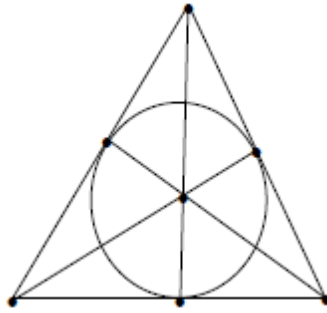
$$\left\{ \begin{array}{l} B'A = B'C \\ C'A = C'B \\ A'B = A'C \end{array} \right. \text{ ולכן}$$

נציב את השוויונות ב- $(*)$ ונקבל $1 \Leftarrow AA', BB', CC'$ קונקורנטיים.

שאלה 2

מעגל γ משיק לצלעות המשולש ΔABC מבפנים. תהי D נקודת ההשקה על BC , E נקודת ההשקה על CA ו- F נקודת ההשקה על AB . בעזרת משפט צ'בה הוכיחו ש- AD, BE ו- CF נפגשים בנקודה אחת.

זהבית צבי ©
כל הזכויות שמורות



הוכחה

בכדי להראות כי AD, BE ו- CF נפגשים בנקודה אחת, עלינו להוכיח לפי משפט צ'בה כי מתקיים:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \quad (*)$$

$$\begin{cases} AF = EA \\ FB = BD \\ DC = CE \end{cases} \text{ שני משיקים היוצאים מאותה נקודה מחוץ למעגל שווים ולכן:}$$

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{EA} \cdot \frac{BD}{FB} \cdot \frac{CE}{DC} = 1 \text{ נציב ב-} (*) \text{ ונקבל:}$$

הוכחנו שהיחס הדרוש במשפט צ'בה שווה אחד ולכן AD, BE ו- CF נפגשים בנקודה אחת, כלומר קונקורנטיים.

שאלה 3

הוכיחו כי הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

הוכחה

נתבונן ב- $\triangle ABC$ ונניח AD גובה ל- BC , BE גובה ל- AC ו- CF גובה ל- AB , כלומר

$$\left. \begin{cases} AD \perp BC \\ BE \perp AC \\ CF \perp AB \end{cases} \right\} \text{ צריך להוכיח ששלושת הגבהים הנ"ל הם קונקורנטיים, כלומר נפגשים בנקודה אחת.}$$

נשתמש במשפט צ'בה.

תחילה, לפי: זווית $\sphericalangle B$ משותפת

ו- $\sphericalangle CFB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$ לפי הנתון

נקבל דמיון משולשים לפי ז.ז: $\triangle CFB \sim \triangle ADB$.

$$\frac{FB}{BD} = \frac{CF}{AD} \text{ לכן נקבל את היחס בין הצלעות המתאימות:}$$

זהבית צבי ©
כל הזכויות שמורות

כעת, זווית $\sphericalangle C$ משותפת

ו- $\sphericalangle BEC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$ לפי הנתון

נקבל דמיון משולשים לפי ז.ז.: $\triangle BEC \sim \triangle ADC$.

לכן נקבל את היחס בין הצלעות המתאימות: $\frac{DC}{CE} = \frac{AD}{BE}$.

וגם זווית $\sphericalangle A$ משותפת

ו- $\sphericalangle BEA = \sphericalangle AFC = 90^\circ$ לפי הנתון

נקבל דמיון משולשים לפי ז.ז.: $\triangle BEA \sim \triangle AFC$.

לכן נקבל את היחס בין הצלעות המתאימות: $\frac{EA}{AF} = \frac{BE}{CF}$.

נכפול את היחסים שקיבלנו ונקבל:

$$\frac{FB}{BD} \cdot \frac{DC}{CE} \cdot \frac{EA}{AF} = \frac{CF}{AD} \cdot \frac{AD}{BE} \cdot \frac{BE}{CF} = 1$$

ומכאן לפי משפט צ'בה מקבלים כי הגבהים AD, BE ו- CF קונקורנטיים.

שאלה 4

המעגל החסום במשולש $\triangle ABC$ נוגע בצלעות BC, CA, AB בנקודות X, Y, Z בהתאמה.

המשך הקטע YZ פוגש את המשך הצלע BC בנקודה K .

$$\frac{BX}{XC} = -\frac{BK}{KC} \quad \text{הוכיחו:}$$

הוכחה

לפי הבניה, הנקודות K, Z, Y קוליניאריות והישר העובר דרכן חותך את הצלעות/המשכי הצלעות ב-

$$\triangle ABC. \quad \text{לכן נשתמש במשפט מנלאוס:} \quad \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$$

$AZ = YA$ משיקים היוצאים מאותה נקודה שווים

נציב ונקבל:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1 \Rightarrow \frac{AZ}{\underbrace{YA}_{=1}} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CY}{ZB} = -1 \Rightarrow \frac{BK}{KC} = -\frac{ZB}{CY}$$

$ZB = BX$ משיקים היוצאים מאותה נקודה שווים

$CY = XC$ משיקים היוצאים מאותה נקודה שווים

ולכן נציב ונקבל: $-\frac{BK}{KC} = \frac{BX}{XC}$. מש"ל