

תרגיל בית 2 באלגברה מתקדמת 83-804 סמסטר א' תש"ף

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1 (חזרה). הוכיחו שהמערכת האלגברית $(\mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \cdot)$ מקיימת את כל האקסיומות של חבורה אבלית פרט לקיבוציות (אסוציאטיביות). הקבוצה היא המספרים הרציונליים יחד עם איבר חדש המסומן ∞ . הפעולה מוגדרת לפי $\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty$ לכל $x \neq 0$, $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 1$ ואחרת זהו כפל רגיל של מספרים רציונליים.

שאלה 2. יהי n מספר טבעי. נגדיר יחס על \mathbb{Z} לפיו $a, b \in \mathbb{Z}$ שקולים בשארית חלוקה n - n אם $n | a - b$, ונסמן יחס זה כ- $a \equiv b \pmod{n}$. הוכיחו כי שקילות מודולו n היא אכן יחס שקילות (כלומר יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי).

שאלות להגשה

שאלה 3. תהי קבוצה $S = \{a, b\}$. רשמו לוחות כפל עם פעולה $*$ כך שהמערכת האלגברית $(S, *)$ היא:

א. אגודה שאינה מונואיד.

ב. מונואיד שאינו חבורה.

ג. חבורה. למה בהכרח מתקבלת חבורה חילופית?

שאלה 4. יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$. הוכיחו כי $m\mathbb{Z} \leq n\mathbb{Z}$ אם ורק אם $n|m$.

שאלה 5. הוכיחו כי לכל $a, n, m \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(an, am) = |a|(n, m)$.

שאלה 6. מצאו בעזרת אלגוריתם אוקלידס את הממ"מ הבאים:

א. $(838, 104)$

ב. $(33520, -4160)$, רמז: העזרו בשאלה הקודמת.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 7. מצאו את כל המספרים השלמים $n \in \mathbb{Z}$ כך ש- $(n^2 + 1) | (n + 1)$.

שאלה 8. בחרו שפת תכנות (לא איזטרית) כרצונכם וכתבו פונקציה בשם xgcd המממשת את אלגוריתם אוקלידס המורחב. כלומר כתבו פונקציה המקבלת כקלט שני מספרים שלמים a, b ומחזירה שלשה של מספרים (d, s, t) כך שמתקיים $d = (a, b) = sa + tb$. הוסיפו את התוצאות של הרצת

$\text{xgcd}(5780, 2020)$ $\text{xgcd}(445566, 778899)$ $\text{xgcd}(838040102, -303972823)$

הערה: בעוד ש- d הוא יחיד, המקדמים s, t הם לא בהכרח יחודיים. לדוגמה $\text{xgcd}(24, 44)$ תוכל להחזיר את השלשה $(4, 2, -1)$ כי $4 = 2 \cdot 24 - 1 \cdot 44$ אבל גם $(4, 13, -7)$ זו תוצאה מותרת, ולכן יתכנו מימושים נכונים שונים. דוגמאות נוספות

$\text{xgcd}(-5, 0) \rightarrow (5, -1, 0)$ $\text{xgcd}(100, 11) \rightarrow (1, 1, -9)$

בהצלחה!