....

הגדרה(טופולוגיית מנה)

יהי X מ"ט ותהי Y קבוצה כלשהי. תהי $f : X \to Y$ על.
הטופולוגיה החזקה ביותר על Y כך שf רציפה, היא טופולוגיית המנה על Y(ביחס לf) ונסמנה τ.
ניתן להגדיר אותה באופן הבא: $O \in \tau \Leftrightarrow f^{-1}(O)$ פתוחה בX.

הגדרה(העתקת מנה)

יהיו X, Y מ"ט. תהי $f : X \to Y$ על.
נאמר שf העתקת מנה אם בנוסף: O פתוחה ב$Y \Leftrightarrow f^{-1}(O)$ פתוחה בX.

משפט

בשני המקרים הבאים f מנה(תנאי מספיק ולא הכרחי):

א. $f : X \to Y$ רציפה על ופתוחה.

ב. $f : X \to Y$ רציפה על וסגורה.

דוגמאות

א. ההטלות ממרחב המכפלה לכל רכיב הן רציפות ופתוחות ולכן העתקות מנה.

ב. X קומפקטי וY האוסדורף. אם $f : X \to Y$ רציפה ועל אזי f גם סגורה ולכן מנה.

דוגמה ספציפית לסעיף ב'

תהי $f : [0, 2\pi] \to S^1$ מוגדרת ע"י $f(x) = (\cos x, \sin x)$ רציפה בגלל שרציפה רכיב רכיב.
$[0, 2\pi]$ קומפקטי(היינה בורל), S^1 האוסדורף(מרחב מטרי)

טענה(שימושית)

יהיו X, Y מ"ט. יהי $\sim$ יחס שקילות על X, ותהי $f : X \to Y$ מכבדת את יח"ש.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

אזי:

א. f רציפה $\Leftrightarrow \hat{f}$ רציפה

ב. f מנה $\Leftrightarrow \hat{f}$ מנה

טענה(נוכיח בש"ב)

תהי $f:X\to Y$ העתקת מנה. אזי f חח"ע $\Leftrightarrow$ f הומאומורפיזם.

סיכום ביניים

שלבי הפעולה בפועל על מנת למצוא למה הומאומורפי מרחב מנה:

1. מציאת פונקציה $f:X\to Y$ המקיימת $x\sim y \Leftrightarrow f(x)=f(y)$, כי אז נקבל $\hat{f}$ חח"ע.
2. א) אם קל להראות ש$f:X\to Y$ מנה אז נקבל ש$\hat{f}$ מנה, ומכיוון שגם חח"ע נסיק ש$\hat{f}$ הומאומורפיזם.
   ב) אם מוכיחים רק שf רציפה אז ניתן להסיק $\hat{f}$ רציפה. מוצאים את ההפוכית ל$\hat{f}$ ומראים שהיא רציפה.

תרגיל

נגדיר יח"ש על $\mathbb{R}^2$:

$(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) \Leftrightarrow y_1=y_2$

הוכיחו כי $\mathbb{R}^2/\sim$ הומאומורפי ל$\mathbb{R}$.

פתרון

נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x,y)=y$.

f פונקצית הטלה ולכן רציפה על ופתוחה ומכאן <u>מנה</u>.

f <u>מכבדת את יח"ש</u> כלומר אם $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2) \Leftarrow y_1=y_2 \Leftarrow f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$

כמו כן מתקיים $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2) \Leftarrow (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ ולכן $\hat{f}$ חח"ע.

$\hat{f}$ חח"ע+מנה ולכן $\hat{f}$ הומאומורפיזם.

דרך נוספת לפתור

נניח שיודעים רק ש$f(x,y)=y$ <u>רציפה</u>(ולא מנה) וש$\hat{f}$ מוגדרת היטב. f רציפה $\Leftarrow$ $\hat{f}$ רציפה. נמצא את ההופכית של $\hat{f}$ ונראה שהיא רציפה.

$$\hat{f}:\mathbb{R}^2/\sim\ \to\mathbb{R}$$

$$\hat{f}\left[(x,y)\right]=f(x,y)=y$$

תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2/\sim$ מוגדרת ע"י $g(y)=[(0,y)]$.

g היא הרכבה של שתי הפונקציות

1. $\mathbb{R}\xrightarrow{y\mapsto(0,y)}\mathbb{R}^2$
2. $\rho:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2/\sim$

מתקיים שפונקציה 2 רציפה כי ρ רציפה לפי הגדרה(למעשה מנה). פונקציה 1 רציפה שכן רציפה רכיב רכיב: ברכיב הראשון פונקציה קבועה, ברכיב השני זהות.

בסה"כ g רציפה כהרכבת רציפות.

נותר להראות שg ההופכית של $\hat{f}$. נראה שההרכבה היא זהות(נוכיח רק בכיוון אחד):

$$g \circ \hat{f}\left[(x,y)\right] = g\left(y\right) = \left[(0,y)\right] = \left[(x,y)\right]$$

בסוף נקבל $\hat{f}$ רציפה, הפיכה, וההופכית רציפה - ולכן $\hat{f}$ הומאומורפיזם.

תרגיל

נגדיר יח"ש על $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ באופן הבא:

$(x_1,y_1)=(x_2,y_2) \Leftrightarrow (x_1,y_1,z_1) \sim (x_2,y_2,z_2)$

מצאו למה הומאומורפי $S^2/\sim$?

הרעיון

אם $x^2+y^2+z^2=1$, אז $x^2+y^2 \le 1$ - עיגול היחידה הסגור.

פתרון

נרצה להראות ש$S^2/\sim \;\cong D = \left\{(x,y) \middle| x^2+y^2 \le 1\right\}$.

נגדיר פונקציה $f: S^2 \to D$ ע"י $f\left(x,y,z\right) = (x,y)$.

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & D \\ S^2/\sim \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

נראה ש$f\left(s^2\right) \subseteq D$, ולמעשה f על D.

נניח $(x,y,z) \in S^2$. אזי

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$$\Downarrow$$

$$x^2+y^2 \le 1$$

$$\Downarrow$$

$$(x,y) = f\left(x,y,z\right) \in D$$

כמו כן f על, שכן אם $(x,y) \in D$ אז $x^2+y^2 \le 1$. מתקיים

$$f\left(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\right) = (x,y)$$

$$f(x_1,y_1,z)=f(x_2,y_2,z_2)\Leftrightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow (x_1,y_1,z_1)\sim(x_2,y_2,z_2)$$

לכן $\hat{f}$ חח"ע.

נוכיח תחילה שf רציפה. f מתקבלת כצמצום התחום והטווח של $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $g(x,y,z)=(x,y)$. g רציפה שכן רציפה רכיב רכיב - בכל רכיב מדובר בהטלה רציפה.
לכן גם $f:S^2\to D$ רציפה. S^2 קומפקטי(לפי היינה בורל). D האוסדורף(מרחב מטרי).
לכן $f:S^2\to D$ רציפה $\Leftarrow$ f סגורה.

f רציפה סגורה ועל ולכן f מנה.

f מנה $\Leftarrow$ $\hat{f}$ מנה.

$\hat{f}$ מנה+חח"ע ולכן הומאומורפיזם.

■