

מבחן בקורס מכינה למתמטיקה לקראת שנת תשע"ד

מרצה: ארז שיינר. תאריך: 29/08/13

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=)

1. נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ x + |x| & -1 < x \leq 1 \\ x + 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f(x) + |f(x)| \leq 1$

2.

א. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $z^2 - (1+i)^8 = 0$

ב. יהי $w \in \mathbb{C}$ המקיים $w^n = 1$ וגם $w \neq 1$. הוכיחו כי $w^n + w^{n-1} + \dots + w = 0$.

$$\text{(רמז: סכום סדרה הנדסית)} \quad (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

3. יהי $v_1 = (1, -1, 0) \in \mathbb{R}^3$. מצאו וקטור $v_2 \in \mathbb{R}^3$ כך ש $v_1 \perp v_2$ והמרחק בין v_1 ל v_2 הוא 2.

4. הוכיחו כי לכל $2 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים $3^n + 4^n \leq 5^n$

5. פתרו את האינטגרל $\int \ln(\sqrt{x}) dx$ (רמז: הצבה $\sqrt{x} = t$)

6. הגדרה: פעולה \odot נקראת **אסוציאטיבית** אם היא מקיימת את התנאי

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} : (x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$$

א. נסחו תנאי השקול לכך שהפעולה \odot אינה אסוציאטיבית

ב. קבעו והוכיחו אילו מן הפעולות הבאות הן אסוציאטיביות, ואילו לא:

$$x \oplus y = x^2 y^2, \quad x \otimes y = x + y - 1, \quad x \odot y = xy + x$$

(הערה: מותר להשתמש בעובדה שהכפל והחיבור הרגילים הם אסוציאטיביים)

7. הוכיחו כי לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $A/B \subseteq B/A \Leftrightarrow A \subseteq B$