תורת המספרים האלגברית (88798) תשפ"א
תרגיל 5

1. יהי $d>1$ שלם חפשי מריבועים, יהי $K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, ויהי $D=d_K$ הדיסקרימיננטה של K. הוכח כי $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ הינו פתרון של משוואת פל:
$$x^2-Dy^2=\pm 4$$
אם ורק אם $\frac{1}{2}\left(x+y\sqrt{D}\right)\in\mathcal{O}_K^\times$.

2. פתרון של משוואת פל נקרא חיובי עם $x>0,y>0$. הוכח שקיים פתרון חיובי מינימי (x,y), במובן שאם (x',y') הינו כל פתרון חיובי אחר, אזי $x'>x$ וגם $y'>y$. הוכח שאם (x,y) הינו פתרון חיובי מינימלי, אזי $u=\frac{1}{2}\left(x+y\sqrt{D}\right)$ הינו הפיך יסודי: $\mathcal{O}_K^\times=\{\pm 1\}\times\langle u\rangle$.

3. החידה הבאה מופיעה בספר החידות הקלאסי Mathematical Amusements של H. E. Dudeney. היא מתארת את הקרב בהייסטינגס, הקרב המכריע בכיבוש הנורמני של אנגליה בשנת 1066.

"The men of Harold stood well together, as was their wont, and formed thirteen squares, with a like number of men in every square thereof, and woe to the hardy Norman who ventured to enter their redoubts; for a single blow of a Saxon war hatchet would break his lance and cut through his coat of mail. After Harold joined his men and threw himself into the fray the Saxons were one mighty square of men shouting the battle cries 'Ut!' 'Olicrosse!' and 'Godemite!' "

הקורא מתבקש למצוא כמה חיילים היו בצבא הסקסוני. למי שמסתבך עם האנגלית, צריך למצוא את המספר הטבעי n המינימלי כך שמתקיים $n=x^2=13y^2+1$ אבור $x,y\in\mathbb{Z}$.

הערה: לפי ההערכות של ההיסטוריונים המודרניים, בצבא הסקסוני של הארולד היה כ־8000 איש. אין להיבהל מחוסר הדיוק ההיסטורי של השאלה.

4. מצא את כל הזוגות $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ המקיימות $5x^2=y^4+5y^2$.

רמז: היעזר במשפט היחידות של דיריכלה.

5. כרגיל, יהי A תחום דדקינד, $K=\operatorname{Frac}A$, תהי L/K הרחבה סופית וספרבילית, ויהי B הסגור השלם של A ב־ L. נתבונן באידאל השברי $\mathfrak{C}_{B/A}=\left\{x\in L:\operatorname{Tr}_{L/K}(xB)\subseteq A\right\}$. זה נקרא האידאל המשלים של דדקינד. ההפכי שלו $\mathfrak{D}_{B/A}=\mathfrak{C}_{B/A}^{-1}$ נקרא הדיפרנטה, או המפריד, של ההרחבה L/K, ומסמנים אותה גם $\mathfrak{D}_{L/K}$.

(א) הוכח כי $\mathfrak{D}_{L/K}\lhd B$ הינו אידאל שלם.

(ב) יהי $K\subset L\subset M$ מגדל של הרחבות סופיות וספרביליות, ויהי C הסגור השלם של A ב־ M. הוכח כי $\mathfrak{D}_{M/K}=\mathfrak{D}_{M/L}\mathfrak{D}_{L/K}$, בתור אידאלים של C.

רמז: צריך להוכיח $\mathfrak{C}_{C/A}=\mathfrak{C}_{C/B}\mathfrak{C}_{B/A}$.

(ג) יהי $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ בסיס של L מעל K. הוכח שקיים בסיס $\{\alpha'_1,\dots,\alpha'_n\}$ שמקיים $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha_i\alpha'_j)=\delta_{ij}$. זה נקרא הבסיס הדואלי.
רמז: המטריצה $(\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha_i\alpha_j))$ הפיכה.

(ד) הוכח כי $d(\alpha'_1,\dots,\alpha'_n)=\frac{1}{d(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$.

6. תהי $d_{L/K}$ הדיסקרימיננטה, כמו שהגדרנו אותה בשיעור: זה האידאל $d_{L/K}\triangleleft A$ הנוצר על ידי כל הדיסקרימיננטות $d(\beta_1,\dots,\beta_n)$ של K־ בסיסים $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}\subset B$ של L.

(א) יהי A תחום ראשי, ויהי $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\subset B$ בסיס שלם. הוכח כי

$$d_{L/K}=(d(\alpha_1,\dots,\alpha_n)).$$

(ב) נניח עדיין כי A תחום ראשי. יהי $\beta_1,\dots,\beta_n$ בסיס שלם. הוכח כי $\mathfrak{C}_{B/A}=A\beta'_1+\cdots+A\beta'_n$ וכי $d_{L/K}=\mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{D}_{L/K})$.

(ג) שאלה מאתגרת יותר: הוכח את השוויון $d_{L/K}=\mathrm{N}_{L/K}(\mathfrak{D}_{L/K})$ בלי ההנחה כי A תחום ראשי.