

1. נפצל את המסילה שלנו לשלושה חלקים

$$\gamma_1(t) = i(1-t), \quad \gamma_2(t) = t, \quad \gamma_3(t) = 1+it$$

כאשר בכל חלק $0 \leq t \leq 1$. נחשב כל חלק של האינטגרל

$$\int_{\gamma_1} z \sin x dz = \int_0^1 i(1-t) \sin 0 \cdot (-i) dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} z \sin x dz = \int_0^1 t \sin t \cdot 1 dt = -t \cos t \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos t dt = -\cos 1 + \sin t \Big|_0^1 = \sin 1 - \cos 1$$

$$\int_{\gamma_3} z \sin x dz = \int_0^1 (1+it) \sin 1 \cdot i dt = i \sin 1 \left(t + \frac{i}{2} t^2 \right) \Big|_0^1 = i \sin 1 - \frac{1}{2} \sin 1$$

נסכום הכל ונקבל

$$i \sin 1 + \frac{1}{2} \sin 1 - \cos 1$$

2. רואים מייד ש

$$\int_{\gamma} \sin z dz = -\cos z \Big|_{\gamma(-\pi)}^{\gamma(1)} = -\cos z \Big|_{-1}^{-1} = 0$$

למעשה, זה נובע מכך שהאינטגרל על מסילה סגורה (חלקה למקוטעין) של פונקציה אנליטית (לפחות בפנים המסילה) הוא 0. לכן נותר לחשב את

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz$$

נפצל אותו לפי שני הקטעים של המסילה ונקבל

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_{-\pi}^0 e^{-it} e^{it} i dt + \int_0^1 (1-2t)(-2) dt = it \Big|_{-\pi}^0 + t - t^2 \Big|_0^1 = i\pi$$

3. ע"י הזהות $\frac{w^3-8}{w-2} = w^2 + 2w + 4$ מקבלים שהאינטגרנד הוא $\bar{z}^2 + 2\bar{z} + 4$. על הציר המדומה,

$$\int_i^0 (4 - 2z + z^2) dz = 4z - z^2 + \frac{z^3}{3} \Big|_i^0 = -\left(4i + 1 - \frac{i}{3}\right) = -1 - \frac{11}{3}i$$

והאינטגרל שם הוא $\bar{z} = -z$

על הקטע הממשי $\bar{z} = z$ והאינטגרל עליו הוא

$$\int_0^1 (z^2 + 2z + 4) dz = \frac{z^3}{3} + z^2 + 4z \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 + 4 = \frac{16}{3}$$

האינטגרל הכולל הוא הסכום של השניים: $\frac{13}{3} - \frac{11}{3}i$

4. א. פשוט לראות כי אורך המסילה הוא $L = 2 + \pi$. האינטגרנד בערך מוחלט הוא

$$|e^z - \overline{e^z}| = |2i \operatorname{Im}(e^z)| = |2ie^x \sin y| = 2e^x |\sin y| \leq 2e^x$$

1, ולכן $e^x \leq e$. מכאן ש- $M = \max_{z \in \gamma} |e^z - \overline{e^z}| \leq 2e$. בסה"כ האינטגרל חסום ע"י

$$ML = 2(\pi + 2)e$$

ב. קל לראות כי אורך המסילה הוא $L = \pi + 2$. האינטגרנד בערך מוחלט (על המסילה) הוא

$$M \leq 3 \text{ כלומר } \left| \frac{2-z}{2+\bar{z}} \right| \leq \frac{2+|z|}{2-|\bar{z}|} \leq \frac{3}{1} = 3. \text{ בסה"כ } ML \leq 3\pi + 6.$$

5. שטויות במיץ. אם ניקח את $f(z) = z$ עם $\gamma(t) = it$ עבור $0 \leq t \leq 1$ אז

$$\int_{\gamma} z dz = \int_0^1 it \cdot i = -\frac{1}{2}$$

ו

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz = 0$$

ולכן השוויון לא מתקיים.