פתרון תרגיל בית 5– חדווא 1

שאלה 1

מצא את סכום הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+7^n}{9^n}$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-8n-3}$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

ד. $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

פתרון שאלה 1

סעיף א

נחשב תחילה את סדרת הסכומים החלקיים S_n ואז את $\lim_{n\to\infty}S_n$:

$$S_n=\frac{2^1+7^1}{9^1}+\frac{2^2+7^2}{9^2}+...+\frac{2^n+7^n}{9^n}$$

$$S_n=\frac{2^1}{9^1}+\frac{2^2}{9^2}+...+\frac{2^n}{9^n}+\frac{7^1}{9^1}+\frac{7^2}{9^2}+...+\frac{7^n}{9^n}$$

$$S_n=\frac{\frac{2}{9}\cdot\left(1-\frac{2^n}{9^n}\right)}{1-\frac{2}{9}}+\frac{\frac{7}{9}\cdot\left(1-\frac{7^n}{9^n}\right)}{1-\frac{7}{9}}$$

$$S_n=\frac{2}{7}\cdot\left(1-\frac{2^n}{9^n}\right)+\frac{7}{2}\cdot\left(1-\frac{7^n}{9^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2}{7}+\frac{7}{2}=\frac{53}{14}$$

סעיף ב

נחשב תחילה את סדרת הסכומים החלקיים S_n ואז את $\lim_{n\to\infty}S_n$:

$$\frac{1}{16n^2-8n-3}=\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right).$$

$$S_n=\frac{1}{4}\cdot\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+...+\left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{4n+1}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}.$$

סעיף ג

נחשב תחילה את סדרת הסכומים החלקיים S_n ואז את $\lim_{n\to\infty}S_n$:

$$S_n=\left(\left(\frac{2}{5}\right)^1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)\right)+\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right)+\ldots+\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$S_n=\left(\frac{2}{5}\right)^1+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n=\frac{\frac{2}{5}\cdot\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}{1-\frac{1}{5}}+1-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{5^n}\right)+1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$$

<u>סעיף ד</u>

$$S_n=\ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

נשים לב ש:

$$\ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\ln\left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)=\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)=\ln n+\ln(n+2)-2\ln(n+1)$$

נחשב תחילה את סדרת הסכומים החלקיים S_n ואז את $\lim_{n\to\infty}S_n$:

$$S_n=(\ln 1+\ln 3-2\ln 2)+(\ln 2+\ln 4-2\ln 3)+(\ln 3+\ln 5-2\ln 4)+(\ln 4+\ln 5-2\ln 6)$$
$$+\ldots(\ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln(n))+(\ln n+\ln(n+2)-2\ln(n+1))$$

נקבל ש $S_n=-\ln 2+\ln(n+2)-\ln(n+1)=-\ln 2+\ln\frac{n+2}{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=-\ln 2$$

<u>שאלה 2</u>

א. מצא נוסחה לחישוב $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$.

ב. חשב את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

ג. חשב את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{5^{n-1}}$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\ldots+\left(\overbrace{\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n}}^{n-times}\right)$$

$$\frac{1}{2}$$
$+$
$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}$$
$+$
$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}$$
$+$

.

.

.

$+$
$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+....+\frac{1}{2^n}$$

נחשב את סכום כל עמודה ולאחר מכן נחשב את סכום התוצאות.

כל עמודה היא סדרה הנדסית. בכל עמודה יש איבר אחד פחות ומשתנה האיבר הראשון.

עמודה ראשונה: $\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$.

עמודה שנייה: $\frac{\frac{1}{2^2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}$.

עמודה שלישית: $\frac{\frac{1}{2^3}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^n}$.

עמודה אחרונה: $\frac{\frac{1}{2^n}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}$.

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^n}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\right)$$

נחשב את סכום העמודות:
$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}-\overbrace{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}-\ldots-\frac{1}{2^n}}^{n-times}$$

$$S_n=2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{n}{2^n}=2-\frac{2+n}{2^n}$$

<u>סעיף ב</u>

$$\lim_{n\to\infty}S_n=2$$

<u>סעיף ג</u>

נחשב תחילה את סדרת הסכומים החלקיים S_n ואז את $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{5^{n-1}}$$
$$S_n=\frac{4\cdot1-3}{5^0}+\frac{4\cdot2-3}{5^1}+\frac{4\cdot3-3}{5^2}+\ldots+\frac{4n-3}{5^{n-1}}$$
$$S_n=4\cdot\left[\frac{1}{5^0}+\frac{2}{5^1}+\ldots+\frac{n}{5^{n-1}}\right]-\frac{3}{5^0}-\frac{3}{5^1}-\ldots-\frac{3}{5^{n-1}}$$
$$S_n=\frac{1}{4}\left[10-\frac{4n+2}{5^{n-1}}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{5}{2}$$

<u>שאלה 3</u>

נתון כי הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n),\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$ מתכנסים. הוכח כי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ו $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים.

<u>פתרון</u>

נשתמש במשפטים:

תהיינה נתונות שתי סדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנסים וסכומיהם A,B בהתאמה, אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ הוא טור מתכנס וסכומו $A\pm B$ ועבור מספר ממשי k הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$ מתכנס וסכומו kA.

נתון שהטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n),\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$ מתכנסים ולכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5}\left((a_n-2b_n)+2(2a_n+b_n)\right)$ מתכנס ז"א הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

בנוסף הטור $-\frac{1}{5}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2(a_n-2b_n)-(2a_n+b_n)\right)$ מתכנס ז"א הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס.

<u>שאלה 4</u>

נתון כי $a_1=7$ וכי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. האם מתכנס הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=9$ ואם כן מהו סכומו.

<u>פתרון</u>

נחשב תחילה את סדרת הסכומים החלקיים S_n ואז את $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$:

$$S_n=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)$$
$$S_n=a_{n+1}-a_1$$

מכיוון שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס נקבל מתנאי הכרחי להתכנסות סדרות ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ואז

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - a_1) = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1 = -7$$

בהצלחה!!!.