

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 8: נוסחת האינטגרל של קושי

1. נוסחת האינטגרל של קושי:

תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום פשוט קשר D ויהי Γ קו רציף סגור הנמצא ב D . לכל נקודה z_0 פנימית ל Γ מתקיים

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

(א) חשבו את האינטגרל $\int_{\Gamma} z^2/(z - 1 + i) dz$ כאשר $\Gamma = \{z : |z| = 3\}$ ראינו כי $f(z) = z^2/(z - 1 + i)$ אינה אנליטית בנקודה $1 - i$ לכן אם נרשום $f = \varphi(z)/(z - 1 + i)$ כאשר $\varphi(z) = z^2$ שלמה נקבל

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{z - (1 - i)} dz = 2\pi i \varphi(1 - i) = 2\pi i (1 - i)^2 = 4\pi$$

(ב) חשבו את האינטגרל $\int_{\Gamma} (z^2 + 1)/(z^2 + 2z - 3) dz$ כאשר

$$\Gamma = \{z : |z| = 2\} \text{ i}$$

נרשום

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \frac{(z^2 + 1)/(z + 3)}{z - 1} dz = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{z - 1} dz = 2\pi i \varphi(1) = \pi i$$

כאשר $\varphi(z) = (z^2 + 1)/(z + 3)$ אנליטית בעיגול $|z| \leq 2$.

$$\Gamma = \{z : |z + 2 + 3i| = 4\} \text{ ii}$$

נרשום

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \frac{(z^2 + 1)/(z - 1)}{z + 3} dz = \int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)}{z - 1} dz = 2\pi i \varphi(-3) = -5\pi i$$

כאשר

$$\varphi(z) = (z^2 + 1)/(z + 3) \text{ אנליטית בעיגול } |z - (-2 - 3i)| \leq 4$$