תרגיל 11

1. יהי R חוג. הוכיחו שאם כל מודול מעל R הוא נאמן, אז R חוג פשוט.
פתרון:

נניח בשלילה שיש לR אידיאל דו צדדי לא טריוויאלי. נסמנו בI. אז החוג R/I הוא מודול מעל R. ניתן לראות ש$I \subseteq Ann_R(R/I)$ כי לכל $i \in I, r+I \in R/I$ מתקיים: $i(r+I) = ir + I = 0 + I$. לכן המודול אינו נאמן. סתירה.

2. תנו דוגמא לחוג R אידיאל שמאלי לא טריוויאלי I, כך R/I הוא מודול נאמן מעל R.
פתרון:

מכיוון שמעל חוג פשוט כל מודול הוא נאמן, ניתן לקחת למשל $R = M_n(F)$, וכל אידיאל שמאלי לא טריויאלי יעבוד.

3. הוכיחו שR כמודול מעל עצמו הוא תמיד מודול נאמן.
פתרון:

אם יש $x \neq 0$ במאפס, אז הוא מקיים שלכל $r \in R$, $xr = 0$. נקח $r = 1$, ונקבל $x = x \cdot 1 = 0$. סתירה.

4. תהי G חבורה אבלית ו$R = End(G)$. הראינו בכיתה שG הוא מודול מעל R. הוכיחו שG הוא מודול נאמן.
פתרון:

יהי $f \in R$ איבר שמקיים שלכל $g \in G$, $f \cdot g = 0$. כלומר, $f(g) = 0$. קיבלנו שf שולח את כל האיברים ל0. זאת בדיוק ההגדרה של העתקת ה0. כלומר, $f = 0$.