מבוא לאנליזה נומרית

תרגיל 15%

ש"ב 5% (רקע השלמה)

בוחן 10% לא מגן

מבחן 85%

* דגש על מד"ים השיטות נומריות

mordellay.yakov@gmail.com

* ספרים: מבוא לאנליזה נומרית של אלנה פרחי, דליה בשלוק

מטרת הקורס: ע קירובים (מציאות) לפיתרון

אנליזה של שגיאות

<u>הגדרה</u>: יהי X ערך אמיתי ויהי $\tilde{X}$ קירוב לערך האמיתי

השגיאה (המוחלטת) תסומן ΔX כאשר $\Delta X = X - \tilde{X}$

השגיאה היחסית תסומן δ_x כאשר $\delta_x = \frac{|\Delta X|}{|X|}$

<u>הערה</u>: קדב את δ_x מציגים באחוזים

<u>תרגיל</u>

$X = 69{,}000{,}000$

$\hat{X} = 68{,}967{,}549$

חשבו את $\Delta X, \delta_x$

$\Delta X = 69{,}000{,}000 - 68{,}967{,}549 = 32{,}451$

$$\delta_x = \frac{|32{,}451|}{|69{,}000{,}000|} = 0.0004 \cdot 100\% = 0.04\%$$

ישנן 2 שיטות ניצוג מספר שנהוג להשתמש בהן:

① <u>שיטת "נקודה קבועה" fix Point:</u>

בה מס מיוצג על ידי ספרות שצריך לפני הנקודה העשרונית ומס קבוע של ספרות אחרי הנק העשרונית

ספרות אחרי הנק העשרונית נקראות "ספרות דצימליות"

<u>דוגמא</u>: במס 0.00123

במס הנל יש 5 ספרות דצימליות

<u>הערה</u>: אם מספר מעוגל ל-d ספרות דצימליות

מתווספת אליו שגיאה מוחלטת החסומה ע"י

$$|\Delta x| < \begin{cases} 10^{-d} & \text{השיטת "קיצוץ"} \\ \frac{1}{2}\cdot 10^{-d} & \text{השיטת "עיגול"} \end{cases}$$

השיטת "קיצוץ" — מורידים את הספרות האחרונות

השיטת "עיגול" — מעגלים למעלה

דוגמא

$\pi = 3.141592653 58$

מצא חסם לשגיאה היחסית כאשר המחשב משתמש בעיגול של 4 ספרות עשרוניות

$$\delta x = \frac{|\Delta x|}{|x|}$$

על פי הגדרה:
$$|\Delta x| \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}$$

$$\delta x = \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-4}}{3.14159265358} = 1.59\cdot 10^{-5}$$

② שיטה 2 לייצוג מס: שיטת נקודה צפה Floating Point

השיטה זו כל מס מיוצג ע"י מכפלה של מנטיסה בעלת אורך קבוע וחזקה מתאימה של הבסיס. ספרות המנטיסה נקראות "ספרות משמעותיות".

* $123{,}456$

$$\underbrace{1.23456}_{\substack{\text{המנטיסה עם} \\ \text{6 ספרות משמעותיות}}}\cdot \underbrace{10}_{\text{בסיס} = 10}{}^{5}$$

החזקה $= 5$

* $-0{,}00123$

$$-\underbrace{1.23}_{\text{מנטיסה}}\cdot \underbrace{10}_{\substack{\text{בסיס} \\ 10}}{}^{-3}$$

חזקה -3

עם 3 ספרות משמעותיות

באופן כללי השיטה הזו המספר מיוצג כך:

$$\underbrace{\text{sign}}_{\text{סימן} \pm}\cdot \underbrace{M}_{\text{מנטיסה}}\cdot \underbrace{B}_{\text{בסיס}}{}^{e}$$

חזקה e

הגדרה: אם מספר מעוגל ל-t ספרות משמעותיות, מתווספת אליו שגיאה יחסית שחסומה ע"י $10^{(1-t)}$ אם מקצצים "קיצוץ" או $\frac{1}{2}\cdot 10^{(1-t)}$ אם מעגלים "עיגול".

דוגמא

תאוצת גרוויטציה g ידועה עד 2 ספרות משמעותיות

$$g = 9.8 \cdot 10^{0}$$

מצא חסם לשגיאה המוחלטת אשר השתמשנו בשיטת העיגול

$t=2$, שיטת עיגול $\Leftarrow$ $\delta_x \le \frac{1}{2}\cdot 10^{(1-2)}$

$$\delta_x \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$\delta_x = \frac{|\Delta x|}{|x|} = \frac{|\Delta x|}{9.8} \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$$

$$|\Delta x| \le 9.8\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^{-1} = 4.9\cdot 10^{-1}$$

קאוס

המנטיסה מכילה p ספרות ונראית כך:

$$\underbrace{d_0 . d_1 d_2 \cdots d_{p-1}}_{\text{סה"כ } p \text{ ספרות}}$$

$d_0 \neq 0$ $\qquad$ $0 < d < B$ ← הבסיס

במחשב תקני יש 2 תקנים לייצוג מס' בצורה בינארית:

<u>תקן 1</u>: float : IEEE 754 32 ביטים לייצוג המס' בצורה בינארית

<u>תקן 2</u>: double : IEEE 754 64 ביטים לייצוג המס' בצורה בינארית

0	1–8	9–31
1	8 ביטים	23 ביטים
sign	e	f

<u>תקן float | 32 ביטים</u>

ביט 1: sign (סימן המספר)

8 ביטים: החזקה (אקספוננט), 2^8 אפשרויות ייצוג (256)

23 ביטים: מנטיסה

הערה: צורה כללית (מייצג בינארי לייצוג עשרוני)

$$\text{מספר} = (-1)^{sign} \cdot Mantisa \cdot B^{exponent}$$

אחרי הוספת 1 · בסיס (כי מדובר במחשב בינארי 2) · אחרי נרמול (להוריד 127)

תרגיל

נתון מס' בצורה בינארית בתקן float

מהו המס' בצורה עשרונית כאשר

sign	exp	Mantisa
0	0 1 1 0 1 0 0 0	1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 ... 0 0 0 0

sign: סימן = 0 ⇐ המס' חיובי

exp: $(01101000)_2 = 2^6+2^5+2^3 = 104$

נרמול: $104-127 = \boxed{-23}$

M: $M = 1+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-6}+2^{-9} = 1.892$

סה"כ: $\text{מספר} = (-1)^0(1.892)\cdot 2^{-23} = 1.892\cdot 2^{-23} = 2.256\cdot 10^{-7}$

העברת מס' עשרוני לבינארי

תרגיל

ייצג את המס' 46.75 בתקן float

sign: 0 כי המס' חיובי

$$46.75 = 46+0.75 = \underbrace{2+2^2+2^3+2^5}_{46} + \underbrace{2^{-1}+2^{-2}}_{0.75} = 2^5\left[1+2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}+2^{-7}\right]$$

נייצג עם אלגוריתם סופי · נייצג עם אלגוריתם אינסופי · נייצג חזקה של 2 הכי גדולה (2^5)

46	שארית חלוקה ב-2
46/2=23	0
23/2=11	1
11/2=5	1
5/2=2	1
2/2=1	0
1/2=0	1

כיוון

46 = 00101110

ספרה שלמה	
0	75
1	5
3	0
1	0
2	0
0	0
0	0

נחסיר כל פעם את הספרה השלמה · נחסיר

$0.75 = 110\ldots0$

$exp = 5+127 = 128+4 = 2^2+2^7$

$M = 2^{-2}+2^{-3}+2^{-4}+2^{-7}$

אם $e = 00\ldots0$ נשמור למס' 0 (אפס עם החזקה ועם המנטיסה)

אם $e = 11\ldots1$ נשמור למס' ∞

ולכן סה"כ ייצוג האקספוננט יש לנו 2^8-2 אפשרויות (254)

כך שניתן לעבור עם חזקות שליליות, כאשר נעבור מבינארי לעשרוני נוריד מהחזקה קבוע bias = 127

דוגמאות: עבור חזקה

צריך להעביר חזקה בינארית לחזקה עשרונית

$$e = (00110010)_2 = 2^5+2^4+2^1 = (50-127)_{10} = (-77)_{10}$$

עפ"י הערה

עבור מנטיסה

$$\text{מנטיסה בבינארי} = 01101\ldots0 = \underbrace{1\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-3}+1\cdot2^{-5}}_{\text{מתוך הייצוג}} + \underbrace{1}_{\text{מוסיפים 1 (נלמד בהמשך)}} = (1.40625)_{10}$$

הערה: לחישוב המנטיסה להוסיף 1 לשאר החישוב

b_{22}	b_{21}	b_{20}	...	b_0

$$M = 1+b_{22}\cdot2^{-1}+b_{21}2^{-2}+\dots+b_0 2^{-23}$$

הערה: אם כל איברי המנטיסה (b_i) הם "1" אז המנטיסה (M) כמעט שווה 2

$$M = \underbrace{1}_{=2^0}+2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-23} = \sum_{i=0}^{23}2^{-i} \approx \sum_{i=0}^{\infty}2^{-i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

לא שווה לגמרי כי יש לנו סכום סופי

סימון בתקן float:

sign=0 ⇐ המס' חיובי

sign=1 ⇐ המס' שלילי

אלא $e = 00\dots0$ נשמר למס 0 (למעט עם החזקה ועם המנטיסה)

ואלא $e = 11\dots1$ נשמר למס ∞

ולכן סה"כ לייצוג האקספוננט יש לנו 2^8-2 אפשרויות (254)

כדי שנוכל לייצג גם חזקות שליליות, כאשר נעבור מבינארי לעשרוני נוריד מהחזקה קבוע $bias = 127$

דוגמאות: ייצוג חזקה

צריך להעביר: חזקה בינארית לחזקה עשרונית

$$e=(\underset{2^7}{0}\,\underset{2^6}{0}\,\underset{2^5}{1}\,\underset{2^4}{1}\,\underset{2^3}{0}\,\underset{2^2}{0}\,\underset{2^1}{1}\,\underset{2^0}{0})_2 = 2^5+2^4+2^1 = (50 - \underset{\uparrow\ \text{לפי הגדרה}}{127})_{10} = (-77)_{10}$$

ייצוג מנטיסה

$$\text{מנטיסה (הבינארי)} = \underset{2^{-1}}{0}\,\underset{2^{-2}}{1}\,\underset{2^{-3}}{1}\,\underset{2^{-4}}{0}\,\underset{2^{-5}}{1}\cdots\underset{2^{-23}}{0}$$

$$= \underbrace{1\cdot2^{-2}+1\cdot2^{-3}+1\cdot2^{-5}}_{\text{מתוך הייצוג}} + \underbrace{1}_{\text{מוסיפים 1 (נראה בהמשך)}} = (1.40625)_{10}$$

הערה: בחישוב המנטיסה להוסיף 1 לשאר החישוב

9				31
b_{22}	b_{21}	b_{20}	...	b_0

$$M = 1 + b_{22}\cdot2^{-1} + b_{21}2^{-2} + \dots + b_0 2^{-23}$$

הערה: אם כל איברי המנטיסה (כל b_i) שווים "1"

אז המנטיסה (M) כמעט שווה 2

$$M = \underbrace{1}_{=2^0} + 2^{-1}+2^{-2}+\dots+2^{-23} = \sum_{i=0}^{22}2^{-i} \underset{\uparrow}{\approx} \sum_{i=0}^{\infty}2^{-i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

לא שווה לגמרי כי יש לנו סכום סופי

סימן במקום float:

$sign=0 \Leftarrow$ המס חיובי

$sign=1 \Leftarrow$ המס שלילי

הגדרה: צורה כללית (מייצג בינארי לייצג עשרוני)

$$num = (-1)^{sign} \cdot Mantisa \cdot B^{exponent}$$

Mantisa: אחרי הוספת 1

B: בסיס 2 (כי מדברים מבינארי)

exponent: אחרי נרמול (להוריד 127)

תרגיל

נתון מס' בצורה בינארית בתקן float

מהו המס' בצורה עשרונית כעשר

sign	exp	Mantisa
0	0 1 1 0 1 0 0 0	1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 ..... 0 0 0 0

sign: סימן $=0 \Leftarrow$ המס' חיובי

exp: $(0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,0)_2 = 2^6 + 2^5 + 2^3 = 104$

$2^7\, 2^6\, 2^5\, 2^4\, 2^3\, 2^2\, 2^1\, 2^0$

נרמול: $104 - 127 = \boxed{-23}$

M: $M = 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-6} + 2^{-9} = 1.892$

סה"כ: $num = (-1)^0 (1.892) \cdot 2^{-23}$

$= 1.892 \cdot 2^{-23} = 2.256 \cdot 10^{-7}$

המרת מס' מעשרוני לבינארי

תרגיל

מצא את המס' 46.75 בתקן float

sign: 0 כי המס' חיובי

$$46.75 = 46 + 0.75 = \underbrace{2 + 2^2 + 2^3 + 2^5}_{46} + \underbrace{2^{-1} + 2^{-2}}_{0.75} = 2^5\left[1 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}\right.$$

נייצג עם אלגוריתם סוטי

46	שארית חלוקה ב-2
$\frac{46}{2} = 23$	0
$\frac{23}{2} = 11$	1
$\frac{11}{2} = 5$	1
$\frac{5}{2} = 2$	1
$\frac{2}{2} = 1$	0
$\frac{1}{2} = 0$	1

ראשון

$46 = 00101110$

מקדימה כדי להשלים ל-8 ביטים

נייצג עם אלגוריתם אינסופי

שלמים	שברים
0.	75
1	5
3	0
1	0
2	0
0	0
0	0

$\cdot 2$

לא שייכים למס' הסופי

נסיר כפולות שלמות של 2

נסיר

$0.75 = 110 \ldots 0$

נוציא חזקה של 2 הכי גדולה (2^5)

$exp = 5 + 127$
$= 128 + 4 = 2^2 + 2^7$

$M = 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7}$

$exp = 2^{2} + 2^{7}$

$M = 1 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-7}$

7 6 5 4 3 2 1 0	-1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10
$\boxed{0}$ 1 0 0 0 0 1 0 0	0 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0

sign — exp — M

מסמנים 1 איפה שיש לנו חזקת 2

מקרים מיוחדים

$exp = \{1 - 254\} \xrightarrow{-127} \{-126 - 127\}$

- החזקה הנמוכה ביותר היא -126 $|00000001|$
- החזקה הגבוהה ביותר היא 127 - $|11111110|$
- כאשר החזקה כולה אפסים והמנטיסה כולה אפסים זה מייצג את המס' 0
- כאשר החזקה כולה אחדות והמנטיסה כולה אפסים זה מייצג את ∞
- כאשר החזקה כולה אחדות ומספיק שבמקום 1 במנטיסה שונה מאפס המס' יהיה NaN = Not a Number

תקן double ב 64 ביטים

1 ביט: סימן sign

11 ביטים: exp

52 ביטים: מנטיסה

11 10 9 ... 0

1 -2 -3 ... -52

$(-1)^{sign} \cdot Mantisa \cdot \underbrace{B}_{2}^{(exp-1023)}$

$2^{11} = 2048$

$2048 - 2 = 2046$

שני מקרים
מעניינים

$\frac{2046}{2} = 1023$

על מנת
שנוכל להשתמש
בחזקות שליליות

מבינארי לעשרוני מחסירים את הנרמול

מעשרוני לבינארי מוסיפים את הנרמול

תרגול 2

תקן double | 64 ביט

1 ביט - סימן
11 ביט - אקספוננט
52 ביט - מנטיסה

באופן כללי, לכל מס x =

$$X = (-1)^{sign} \cdot mantisa \cdot 2^{exp}$$

exp ← אחרי נרמול

mantisa ← 2 ס עקרים מספר בינארי עשרוני

$2^{11} = 2048$ אפשרויות

צריך 2 מקרים:

$exp = 111\ldots1 \rightarrow$ מייצג את ∞

$exp = 00\ldots0 \rightarrow$ מייצג את 0

$dias = 1023$

$2048 - 2 = 2046$ אפשרויות

עם חיוביות וגם שליליות

אז נחלק ב-2

$$\frac{2046}{2} = 1023 = bias$$

<u>דוגמא</u> הצג את -71.3125 לבסיס בינארי בתקן double

הסימן שלילי ← $sign = 1$

$$71.3125 = 71 + 0.3125$$

	71	שארית
$\frac{71}{2}$	35	1
$\frac{35}{2}$	17	1
$\frac{17}{2}$	8	1
$\frac{8}{2}$	4	0
$\frac{4}{2}$	2	0
$\frac{2}{2}$	1	0
$\frac{1}{2}$	0	1

קוראים מלמטה למעלה

0	3125
0	625
1	25
~~2~~	~~5~~
0	5
1	0
~~2~~	~~0~~
0	0
0	
0	
0	

$\cdot 2$

קוראים מלמעלה למטה

לא נקרא ←

מורידים כפולות שלמות של 2

$$71 = \underset{2^6}{1}\underset{2^5}{0}\underset{2^4}{0}\underset{2^3}{0}\ \underset{2^2}{1}\underset{2^1}{1}\underset{2^0}{1}$$

$$0.3125 = \underset{2^{-1}}{0}\,\underset{2^{-2}}{1}\,\underset{2^{-3}}{0}\,\underset{2^{-4}}{1}\,0\,0\,0$$

$$71.3125 = 2^6 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-2} + 2^{-4}$$

$$= 2^6\left[1 + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-8} + 2^{-10}\right]$$

$\Downarrow$

$$exp = 6 + bias = 1029 = 1024 + 5 = 2^{10} + 2^2 + 2^0$$

לקודם את המנטיסה נחסיר מה-1 ונסתכל על החזקות:

$$[1+\underbrace{2^{-4}+2^{-5}+2^{-6}+2^{-8}+2^{-10}}_{\text{החזקות}}]$$

$$\begin{array}{r|ccccccccccc|}
 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
exp & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|cccccccccccccc}
 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -9 & -10 & -11 & -12 & -13 & \dots \\
mantisa & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots
\end{array}$$

הגדרה:

$\varepsilon_{machine}$ - קבוע float

$$|\varepsilon_{machine}| < 2^{-23} \sim 1.19 \cdot 10^{-7}$$

קבוע double

$$|\varepsilon_{machine}| < 2^{-52} \sim 2.22 \cdot 10^{-16}$$

$X < \varepsilon_{machine}$ ← המחשב מחשיב אותו כאפס

תרגיל

חשב את $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

א) אם $\varepsilon_{machine} < X$

ב) אם $X < \varepsilon_{machine}$

פתרון

א) $e \leftarrow (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad 1+X = 1+X$

ב) $1 \leftarrow (1+X)^{\frac{1}{x}}$ $\quad 1+X=1$

תרגיל

האם החלפת סדר האיברים בסכום יכולה לתת תוצאה שונה על ידי חישוב מקורב?

אם כן הוכח וחשב את $1{,}000{,}000 + 1{,}000{,}000$

הנחה דרוש שנית בעשרוני שהמחשב ניתן לשמור עד 6 ספרות משמעותיות במנטיסה

פתרון

(א) לא (ב)

$$1,000,000+1,000,000 = 10^6+10^6 = \underbrace{2}_{\text{במנטיסה יש ספרה משמעותית 1}}\cdot 10^6$$

$$1,000,000 + \underbrace{1+1+\dots+1+1}_{1,000,000 \text{ פעמים}}$$

$$1,000,000+1 = 1,000,001 \underset{\text{floating point -בנ"צ}}{=} \underbrace{1.000001}_{\text{7 ספרות משמעותיות במנטיסה}} \cdot 10^6$$

המחשב יכול לשמור רק 6 ספרות במנטיסה, הוא ישמיט את 0.000001

ולכן $1000,000+1 = 1,000,000$

נמשיך כך ונקבל ש- $1,000,000+\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{\text{מליון פעמים}} = 1,000,000$

שגיאות קירוב

תזכורת

תהי f פונק' $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונק' גזירה n+1 פעמים ברציפות בקטע $[x_0,x]$ אזי טור הטיילור שלה מסביב x_0 - הוא

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i}{i!} + \underbrace{R_{n+1}(x)}_{\text{שארית לגרנז'}}$$

כאשר $R_{n+1}(x)$ הוא: $\boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}}$ כאשר $c\in[x_0,x]$

תרגיל

קרבו את e^{2x} ע"י טור טיילור עד סדר 2 סביב נק' $x_0=1$ בקטע $[1,10]$

$$e^{2x} = \sum_{i=0}^{2} \frac{f^{(i)}}{i!} + R_{n+1} =$$

$$f^{(0)}(1) = e^2 \qquad f^{(1)}(1) = 2e^2 \qquad f^{(2)}(1) = 4e^2 \qquad f^{(3)}(c) = 8e^{2c}$$

$$e^{2x} = \frac{e^2}{0!}(x-1)^0 + \frac{2e^2}{1!}(x-1)^1 + \frac{4e^2}{2!}(x-1)^2 + \underbrace{\frac{8e^{2c}}{3!}(x-1)^3}_{R_{n+1}(c)}$$

$$= e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{8e^{2c}}{3!}(x-1)^3$$

$$1 \le c \le 10 \;, \quad 1 \le x \le 10$$

נרצה לחסום את השגיאה - את השארית $R_3(x)$

$$|R_3(x)| \le R_3(10) = \frac{8e^{20}}{3!}(10-1)^3 = \frac{8e^{20}\cdot 9^3}{3!}$$

שגיאה מתפשטת

הגדרה: שגיאה מתפשטת = חישוב שגיאת הפלט כשגיאה המושפעת מהקלט

$$\underbrace{X^*}_{\text{קלט}} \xrightarrow{\text{מקורב}} \longrightarrow \boxed{\text{אלגוריתם}} \longrightarrow \underbrace{Y^*}_{\text{פלט}} \longrightarrow Y_{\text{עם שגיאה}}$$

תזכורת: שגיאה מוחלטת:

$$\Delta x = x - x_0$$

שגיאה יחסית:

$$\delta_x = \frac{|\Delta x|}{|x|}$$

נוסחה לשגיאה הקלט פונק׳

$$u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$u(x_1, \dots, x_n) = x_0$$

אז השגיאה המתפשטת המוחלטת:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Bigg|_{x^*} \cdot \Delta x_i$$

(הנגזרת
ב x המקורב
הערך מוחלט)

שגיאה מתפשטת יחסית:

$$\delta_u = \left|\frac{\Delta u}{u}\right| = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Big|_{x^*} \Delta x_i}{u\Big|_{\text{אמיתי } x}}$$

$$\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

החסם לשגיאה המוחלטת

$$\Delta u \le \max\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}^*}\right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

<u>תרגיל</u>

מהו החסם לשגיאה המתפשטת המוחלטת והיחסית של נפח כדור

$$V(R,\pi) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

נתון: $\pi = 3.14159$ ערך אמיתי

$\pi^* = 3.14$ מקורב

$R^* = 5.3$ מקורב

$\Delta R = 0.05$

$$R - R^* = \Delta R$$

$$\Downarrow$$

$$R = \Delta R + R^* = 5.3 + 0.05$$

$$R = 5.35$$

נמצא את ΔV, δ_V

$$\Delta\pi = 3.14159 - 3.14 = 0.00159$$

נתון $\Delta R = 0.05$

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 4\pi R^2 \qquad \frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{4R^3}{3}$$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial R}\right|_{} = |4(3.14)\cdot(5.3)^2| = 352.81$$

$R^* = 5.3$

$\pi^* = 3.14$

$(R^*, \pi^*) = (5.3, 3.14)$

$$\left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\right|_{} = \left|\frac{4}{3}(5.3)^3\right| = 198.5$$

$R^* = 5.3$

$$\max\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}^*}\right) = 352.81$$

$$\Delta V \le 352.81 \cdot (\Delta R + \Delta\pi) = 352.81(0.00159 + 0.05) = 18.201$$

$$\Delta V \le 18.201$$

$$\delta_V = \left|\frac{\Delta V}{V}\right| \le \frac{\max\left(\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|_{x^*}\right) \sum \Delta x_i}{V|_{x^*}} = \frac{18.201}{\frac{4\cdot 3.14\cdot(5.3)^3}{3}} = \frac{18.201}{623.29} = 0.029$$

$$\delta_V = 0.029 \cdot 100 = 2.9\% \sim 3\%$$

שגיאות התבטלות

אם מחסירים 2 מספרים קרובים קרובים

השגיאה היחסית גדלה כיוון שמס' ספרות משמעותיות גדול מתבטל

דוגמא: מחשב בעל ייצוג של 6 ספרות משמעותיות

$1.23456789 - 1.2300000$

חישוב אמיתי: 0.00456789

חישוב עם 6 ספרות משמעותיות: $1.23456 - 1.23000 = \underbrace{0.00456}_{\text{איבדנו 3 ספרות}}$

כלומר איבדנו 3 ספרות משמעותיות

נמצא דרכים להקטין שגיאות התבטלות

תרגיל

$$\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}$$

כאשר a קטן, מצא דרך להקטין את שגיאות ההתבטלות.

פתרון

דרך א: נכפיל ונחלק בצמוד:

$$\frac{(\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a})(\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a})}{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}$$

$$= \frac{1+a-(1-a)}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}} = \frac{2a}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}$$

התוצאה שקיבלנו אין חיסור של מספרים קרובים.

המכנה נקבל מס' הקרוב ל-2 ובמונה גם אין בעיה של דיוק.

הדיוק של התוצאה שתתקבל יהיה גבוה.

שאלה: עכשיו איך מעריכים את הדיוק הנ"ל ומה עושים כשלא הולכים דרך של כפל בצמוד?

תשובה: בחלק גדול מהמקרים אפשר לפתח לטור טיילור את הביטוי וזה יפתור את שגיאות ההתבטלות

דיוק ק טור טיילור

$$f(x)=\sqrt{1+x}$$

מכיוון שנתון a קטן נפתח את $f(x)$ לטור טיילור סביב $X_0=0$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \qquad f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4(\sqrt{x+1})^3} \qquad f''(0)=-\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{1}{12(\sqrt{x+1})^5} \qquad f^{(3)}(0)=\frac{1}{12}$$

מכיוון נפתח את $f(x)$:

$$f(x)=1+\frac{1}{2}(x-0)-\frac{\frac{1}{4}}{2!}(x-0)^2+\frac{\frac{1}{12}}{3!}(x-0)^3-\dots$$

$$\sqrt{1+x}=f(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{72}x^3-\dots$$

$$f(a)=1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{72}(a^3)-\dots$$

$$f(-a)=1-\frac{1}{2}a-\frac{1}{8}a^2-\frac{1}{72}(a)^3-\dots$$

$$f(a)-f(-a)=a^1+\frac{1}{36}a^3$$

אך a הוא אינפיניטסימלי של a^1 הוא האיבר הדומיננטי

לכן קירוב $\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\approx a^1$ מספיק לחשב אותו כדי להעריך את השגיאה

תרגיל

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-x}-\sin(\sqrt{x})$$

הסבר את הקטנויות של הפונק עבור x קרוב ל-0

והסבר כיצד ניתן לפתור קצה זו

פתרון

$$\frac{\sqrt{x}}{1-x}\to 0 \qquad \sin\sqrt{x}\to 0$$

לכן תיווצר שגיאת התבטלות מחיסור בין 2 הגורמים

כדי למנוע זאת, נפתח את $\sin(\sqrt{x})$, $\frac{\sqrt{x}}{1-x}$ לטור טיילור

סביב $X_0=0$

$$\frac{1}{1-x}\underset{|x|<1}{=}\sum_{i=0}^{\infty}x^i=1+x+x^2+\dots$$

$$\frac{\sqrt{x}}{1-x}=x^{\frac{1}{2}}+x^{1.5}+x^{2.5}+\dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin(\sqrt{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n+1)!} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3!} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7!} + \dots$$

$$\frac{\sqrt{x}}{1-x} - \sin(\sqrt{x}) = (\cancel{x^{\frac{1}{2}}} + x^{1.5} + x^{2.5} + x^{3.5} + \dots) - (\cancel{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{1.5}}{3!} + \frac{x^{2.5}}{5!} - \frac{x^{3.5}}{7!} + \dots)$$

$$= \frac{7}{3!} x^{1.5} + \frac{119}{5!} x^{2.5} \dots$$

כאשר x קרוב ל-0 האיבר הדומיננטי הוא $\frac{7}{3!}x^{1.5}$

ולכן מספיק להתמקד ב- $\frac{7}{3!}x^{1.5}$ כדי לחשב את הביטוי

$\frac{\sqrt{x}}{1-x} - \sin(\sqrt{x})$

עבור x-ים קרובים לאפס

תרגול 3

תרגיל

נתונה הפונק' $\sqrt{x^2+1} - x$ לגדול ערכי x ישנה שגיאות התבטלות?

מצא דרך לחישוב הפונק' שתמנע את השגיאה הנ"ל.

פתרון

עבור x גדולים $\sqrt{x^2-1}$ קרוב ל-x

ולכן תיווצר שגיאות התבטלות

נכפול ונחלק בצמוד

תרגיל

נתונה המשוואה הריבועית $ax^2+bx+c=0$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

עבור $b^2 >> |4ac|$ כלומר $4ac$ זניח לעומת b^2 ותיווצר שגיאות התבטלות ב-x_1.

(נוסחת וייטה)

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

נמצא את x_2 (שהוא ללא שגיאה) ובאמצעות נוסחת וייטה

נמצא את x_1

איבוד דיוק בחישוב ערך של פולינום

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

חישוב פולינום רגיל כרוכה בפעולות אריתמטיות
רבות כגון העלאה בחזקה, כפל וחיבור
פעולת העלאה בחזקה מגדילה את המס'
ולכן גורמת איבוד ספרות משמעותיות בעיגול ומס'
ספרות רבות ולכן השיטה העדיפה לחישוב ערך הפולינום
רגיל לשני נתון ע"י שיטה "מקוננת" ("nested")

$$P_n(x)=(((a_n(x+a_{n-1})x+a_{n-2})x+a_{n-3})x+\dots)x+a_0$$

לדוגמא:

$$P_3(x)=x^3-6.1x^2+3.2x+1.5$$

$$P_3(x)=((x-6.1)x+3.2)x+1.5$$

שורש של המשוואה הלא לינארית

x_0 יקרא שורש של הפונק' $f(x)$ אם מתקיים $f(x_0)=0$

x_0 יקרא שורש פשוט אם $f(x_0)=0$ אך $f'(x_0)\neq 0$

באופן דומה - x_0 יקרא שורש מסדר n אם

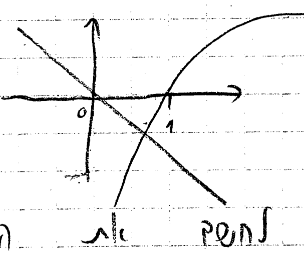
$$f(x_0)=f'(x_0)=\dots=f^{(n)}(x_0)=0$$

אך $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$

פתרון משוואות לא לינאריות

ניקח את הפונק' $f(x)=e^{2x}-\cos(x)$

$g(x)=x+\ln(x)$



יודעים שאיפשהו בין 0 ל-1 ש' $g(x_0)=0$

אין דרך אנליטית לחשב את השורש x_0
לכן נשתמש בשיטה איטרטיבית, כלומר אלגוריתם
שנותן קירוב לפתרון בשלב ה-n ונשתמש בקירוב

זה למצוא קירוב טוב יותר מספק ה- n של מציאת השורש.

שיטת חציה

① קחו קטע כלשהו $[x_0, x_1]$ כך ש
$$f(x_0)f(x_1)<0$$

② חשבו את $x_2=\frac{x_0+x_1}{2}$

$x_0 \quad x_2 \quad x_1$

③ אם $f(x_2)<\varepsilon$ סיימנו. אחרת

④ אם מתקיים $f(x_0)f(x_2)<0$ אז לצמצם הקטע

נמשיך עם הקטע $[x_0, x_2]$ (נחליף את x_1 ב- x_2)

אחרת נמשיך עם הקטע $[x_2, x_1]$ (נחליף את x_0 ב- x_2)

⑤ נחזור לסעיף ②

תנאי עצירה: ① אם $f(x_2)<\varepsilon$

② אם $|x_0-x_1|<\delta$ / $|x_n-x_{n+1}|<\delta$

③ מס' איטרציות נתון

ε, δ נתונים קטנים

הערה: נסמן את n להיות מס' האיטרציות לקבלת דיוק נתון ε.

(מצא) נוסחה לשם מציאת כמות איטרציות שצריך לעשות בשיטת חציה מהנתון ε.

עבור קטע $a \vdash\!\dashv b$

נסמן l_i אורך הקטע באיטרציה ה- i

$$l_0=b-a \qquad c=\frac{a+b}{2}$$

$$l_1=\frac{b-a}{2}$$

$$l_{n+1}=\frac{b-a}{2^{n+1}}<\varepsilon$$

(נפעיל) $\log_2$ על 2 האגפים

$$\log_2\left(\frac{b-a}{2^{n+1}}\right)\le \log_2(\varepsilon)$$

$$\log_2(b-a)-(n+1)\log_2(2)\le \log_2(\varepsilon)$$

$$n+1 \ge \log_2(b-a) - \log_2(\varepsilon) = \log_2\left(\left|\frac{b-a}{\varepsilon}\right|\right)$$

$$n+1 \ge \left\lceil \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \right\rceil$$

הערך השלם (עיגול למעלה)

המשמעות הסופית n הוא מס׳ שלם לכן נעגל את התוצאה כלפי מעלה.

יתרונות / חסרונות

יתרונות:

① תמיד נוכל למצוא את השורש רק צריך ש-f תהיה רציפה ושתקבל סימנים מנוגדים בקצוות

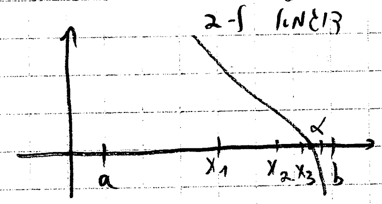
חסרונות:

① התכנסות איטית, כלומר נצטרך להפעיל הרבה איטרציות

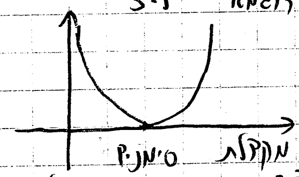
② אם נבחר את 1 מהקצוות של הקטע קרוב לשורש זה יגרור כמות איטרציות גדולה

③ אם הפונק׳ משיקה לציר X לא נוכל להשתמש בשיטה

דוגמא ל-2



דוגמא ל-3



לא מקבלת סימנים מנוגדים - לא ניתן לבחור a,b
f תמיד חיובית

④ אם קיימים כמה שורשים לא נוכל למצוא את כולם בו זמנית

תרגיל

השתמש בשיטת חציה עם למצוא קירוב ל- $\sqrt{11}$

ק ש- $|f(x)| < 0.4$

פתרון נגדיר

$f(x) = x^2 - 11$

$f(3) = 9-11 = -2 < 0$

$f(4)\ 16-11 = 5 > 0$

ולכן עפ״י משפט ערך הביניים: f פונק׳ רציפה בקטע [3,4] (כי היא פולינום) ולכן f מקבלת סימנים מנוגדים

בקצוות, ולכן קיים $c\in[3,4]$ (לבחור c אחד) כך ש- $f(c)=0$

(כבר יש יחידות של c כי הנגזרת מונוטונית עולה בקטע)

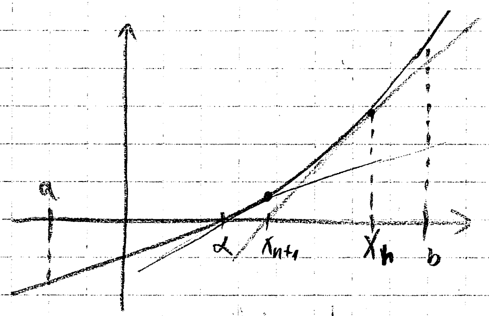
הקטע ההתחלתי שבחרנו: $[3,4]$

מס איטרציות	n	קצה שמאלי a_n (סימן שלילי)	אמצע הקטע $c_n=\frac{a_n+b_n}{2}$	קצה ימני b_n (סימן חיובי)	$f(c_n)$
1		3	3.5	4	$f(3.5)=1.25>0$
2		3	3.25	3.5	$f(3.25)=-0.4375<0$ ← עדיין לא קיבלנו דיוק המבוקש $\lvert f\rvert<0.4$
3		3.25	3.375	3.5	$f(3.375)=0.39>0$

מקיים את התנאי $\lvert f\rvert<0.4$

קיבלנו $\lvert f(3.375)\rvert<0.4$ ולכן נוכל לעצור ולהגיד ש

$$c_3=3.375\sim\sqrt{11}$$



שיטת ניוטון - רפסון N.R

נחשב את משוואת המשיק דרך $[x_n, f(x_n)]$

$$m=f'(x_n)$$

משוואת ישר

$$y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$$

נרצה נק' חיתוך של הישר עם ציר X $\Leftarrow$ $y=0$, $x=x_{n+1}$

$$0-f(x_n)=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$$ נניח $f'(x_n)\neq0$

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_{n+1}-x_n$$

שיטת N.R

$$\boxed{x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_{n+1}}$$

תרגיל

נפתור את המשוואה הבאה

$$f(x)=x+\ln(x)=0 \rightarrow -x=\ln(x)$$

בעזרת שיטת N.R , נק' התחלה $X_0=1.075$

הצג 2 איטרציות

פתרון

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}$$

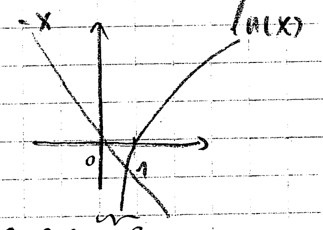
$$X_0=1.075$$

$$X_1=X_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1.075-\frac{1.075+\ln(1.075)}{1+\frac{1}{1.075}}=0.4806$$

$$X_2=X_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=0.4806-\frac{0.4806+\ln(0.4806)}{1+\frac{1}{0.4806}}=0.56245$$

נבדוק את X_2

$$f(x_2)=-0.013$$



ידוע שהשורש בין 0 ל-1

יתרונות:

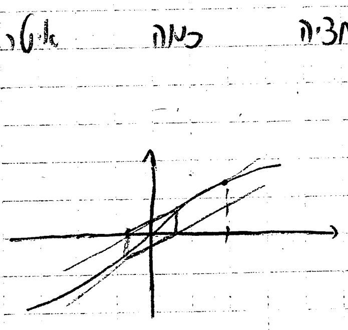
1) התכנסות לשורש תוך מס' קטן של צעדים

חסרונות

1) חישוב של נגזרת
2) אם הנגזרת מתאפסת בנק' מסוימת, לא ניתן להשתמש בשיטה
3) צריך לקחת X_0 (ניחוש התחלתי) שקרוב לשורש

טיפ

כשנתון משוואה לא ליניארית יש למצוא X_0 ניחוש התחלתי שקרוב לשורש, לכן נפעל שיטת חציה כמה איטרציות ואז נפעל שיטת N.R



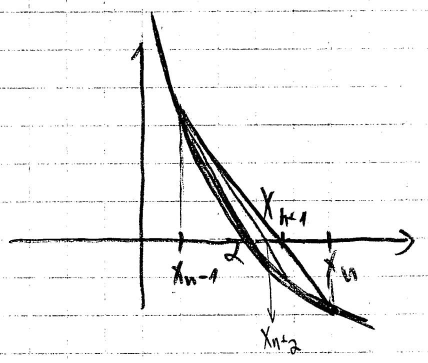
במקרה זה לא ניתן להשתמש בשיטת NR מכיון שהנגזרת לא מתאפסת

שיטת מיתר

מקרבים את הנגזרת בעזרת הנק' $(x_n, f(x_n)), (x_{n-1}, f(x_{n-1}))$

$$f'(x_n) \approx \underbrace{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}_{\text{שיפוע של הקו הישר}}$$

שיפוע של הקו הישר
המחבר בין 2 הנק'



$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \cdot (x - x_n)$$

נשווה את $y=0$, $x = x_{n+1}$

$$-f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x_{n+1} - x_n)$$

$$\frac{-f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = x_{n+1} - x_n$$

שיטת מיתר

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

שיטה זו דורשת 2 נק'
ולא 1 כמו ב- NR

תרגיל

נמצא שורש ל- $f(x) = \sin(x) + xe^x$ בקטע $[-4,-3]$

עגל ל- 4 ספרות דצימליות

נפעיל שיטת מיתר, 2 איטרציות

-4 חיובי, -3 שלילי

פתרון

$$f(-3) = \sin(-3) - 3e^{-3} \approx -0.2905$$

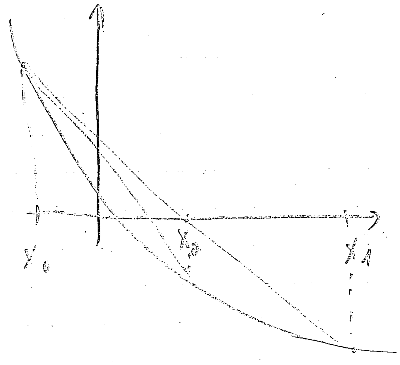
$$f(-4) = \sin(-4) - 4e^{-4} \approx 0.6835$$

$x_0 = -4 \qquad x_1 = -3$

$$x_2 = -3 - \frac{f(-3)(-3-(-4))}{f(-3) - f(-4)} = -3.2982 \qquad f(-3.2982) = 0.0342$$

$$x_3 = -3.2982 - \frac{f(-3.2982)(-3.2982-(-3))}{f(-3.2982) - f(-3)} = -3.2666$$

$$|f(-3.2666)| \to 0$$



שיטת ניוטון רפסון רב מימדי

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \underbrace{J^{-1}}_{\text{ההופכית}}(\vec{x}^{(k)}) \cdot \vec{F}(\vec{x}^{(k)})$$

של J (יעקוביאן) בנקודה $\vec{x}^{(k)}$

$$\vec{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

k מסמן את מס' האיטרציה

תרגול 4

ניוטון רפסון חד מימדי

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)}$$

ניוטון רפסון רב מימדי:

$$\begin{cases} f_1(X_1, \dots, X_n) = 0 \\ f_2(X_1, \dots, X_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(X_1, \dots, X_n) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{F}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f_1(X_1, \dots, X_n) \\ f_2(X_1, \dots, X_n) \\ \vdots \\ f_n(X_1, \dots, X_n) \end{bmatrix} \qquad \vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

באופן כללי: $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

נוסחת N.R רב מימדי:

$$\underset{n\times 1}{\vec{X}^{(n+1)}} = \underset{n\times 1}{\vec{X}^{(n)}} - \underset{n\times n}{J^{-1}(\vec{X}^{(n)})}\, \underset{n\times 1}{\vec{F}(X^{(n)})}$$

מטריצת היעקוביאן ההופכית

$$\vec{X}_n = \begin{matrix} X_1^{(n)} \\ X_2^{(n)} \\ \vdots \\ X_n^{(n)} \end{matrix}$$

איטרציה ה-n-ית

J הוא מטריצת היעקוביאן:

$$J(\vec{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

J^{-1} זה המטריצה ההפכית למטריצת היעקוביאן

תרגיל:

נתון $x^2+y^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ואליפסה $3x^2+4y^2=3$

מצא קירוב לאחת מנקודות החיתוך של המעגל עם האליפסה

בעזרת N.R רב מימדי. בצע 2 איטרציות עם ניחוש

$$\vec{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$ התחלתי

פתרון

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ 3x^2 + 4y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3x^2 + 4y^2 - 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to f_1 \\ \to f_2 \end{matrix}$$

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$J = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 6x & 8y \end{bmatrix}$$

תזכורת : $M \in R_{2\times 2}$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

עוד אפשרות זה ק

$$(M \mid I) \xrightarrow{\text{גאוס}} (I \mid M^{-1})$$

$$J^{-1}(\vec{X}) = \frac{1}{4xy} \begin{pmatrix} 8y & -2y \\ -6x & 2x \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}^{(1)} = \vec{X}^{(0)} - J(\vec{X}^{(0)}) F(\vec{X}^{(0)})$$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} \begin{pmatrix} \frac{8}{2} & -\frac{2}{2} \\ -\frac{6}{2} & \frac{2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5^2 + 0.5^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3 \cdot 0.5^2 + 4 \cdot 0.5^2 - 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{2\times 1} - \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} -0.366 \\ -1.25 \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \cdot (-0.366) + 1.25 \\ 3 \cdot 0.366 - 1.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.214 \\ -0.152 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.714 \\ 0.652 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \vec{X}^{(1)} - J(\vec{X}^{(1)}) F(\vec{X}^{(1)})$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.714 \\ 0.652 \end{pmatrix} - \frac{1}{4 \cdot 0.714 \cdot 0.652} \begin{pmatrix} 8 \cdot 0.652 & -2 \cdot 0.652 \\ -6 \cdot 0.714 & 2 \cdot 0.714 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.714^2 + 0.652^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3 \cdot 0.714^2 + 4 \cdot 0.652^2 - 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.714 \\ 0.652 \end{pmatrix} - 0.537 \begin{pmatrix} 5.216 & -4.284 \\ -1.304 & 1.428 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0688 \\ 0.2298 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.714 \\ 0.652 \end{pmatrix} - 0.537 \begin{pmatrix} 0.0592 \\ 0.03341 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.682 \\ 0.634 \end{pmatrix}$$

נבדוק אם זה קרוב לתשובה נכון:

$$F\begin{pmatrix} 0.682 \\ 0.634 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.682^2 + 0.634^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3 \cdot 0.682^2 + 4 \cdot 0.634^2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00105 \\ 0.0031 \end{pmatrix}$$

קרוב לאפס
אחרי 2
איטרציות.

תנאי עצירה:

מס' איטרציות נתון מראש

חסרונות השיטה:

1. צריך לבחור וקטור $\vec{X}^{(0)}$ שקרוב לפתרון האמיתי
2. אם J (מטריצת היעקוביאן) סינגולרית - כלומר $|J| = 0$
לא ניתן להשתמש בשיטת N.R רק ממשיות
3. יקרה - כיוון שבכל איטרציה אנחנו הופכים את J
כלומר מחשבים את ההופכית של J
4. אם יש כמה שורשים נמצא רק 1

יתרונות:

1. מהירה
2. מס' איטרציות קטן

פירוק LU

נתונה המשוואה $A\vec{x} = \vec{b}$ ← מטריצה

וקטור נעלמים, וקטור פתרונות

נרצה לפרק את A ל: $L \cdot U$

L = משולשית תחתונה

U = משולשית עליונה

$$\boxed{A = L \cdot U}$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\underbrace{L U \vec{x}}_{y} = \vec{b} \xrightarrow[\text{2 משוואות}]{\text{ניצור}} \begin{cases} L\vec{y} = \vec{b} \\ U\vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

המטרה: למצוא את $\vec{x}$

אלגוריתם של LU:

נדרג בלי החלפת שורות (pivoting) את המטריצה A

המטריצה אחרי הדירוג תקרא U

ואת L נקבל מקבוצת ה"כופלים"

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

האלכסון של L תמיד יש '1'

כופלים ה"כופלים":

$$m_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{jj}}$$

טיפ אצבע!

ב-L האלכסון הראשי תמיד אחדות

תרגיל

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

א) פרק את A ל- $L \cdot U$

ב) מצא את A^{-1} מסעיף א

פתרון

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה A ללא החלפת שורות

$$\boxed{m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{3}{1} = 3}$$

$$A \xrightarrow[R_2 = R_2 - 3R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2}$$

$$\boxed{m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}}$$

$$R_3 \to R_3 - \frac{9}{4}R_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix}$$

קיבלנו את מטריצה U!

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\ m_{21}&1&0\\ m_{31}&m_{32}&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 3&1&0\\ 2&\frac{9}{4}&1\end{pmatrix}$$

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\ 3&1&0\\ 2&\frac{9}{4}&1\end{bmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}1&3&2\\ 0&-4&-2\\ 0&0&6.5\end{bmatrix}}_{U}$$

(ב) האם בעזרת פירוק LU ניתן למצוא את A^{-1}?

$$A\cdot A^{-1}=I$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}|&|&|\\ X_1&X_2&X_3\\ |&|&|\end{pmatrix}=I=\begin{bmatrix}1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}$$

① $A\begin{pmatrix}|\\ X_1\\ |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ מערכות ליניאריות!

② $A\begin{pmatrix}|\\ X_2\\ |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

③ $A\begin{pmatrix}|\\ X_3\\ |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

①: $A\begin{pmatrix}X_{11}\\X_{21}\\X_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$L\underbrace{U\begin{pmatrix}X_{11}\\X_{21}\\X_{31}\end{pmatrix}}_{y_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}L\vec{y}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\\ U\begin{pmatrix}|\\X_1\\|\end{pmatrix}=\vec{y}_1\end{cases}$$

$$L\,y_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&\frac{9}{4}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{11}\\y_{21}\\y_{31}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

הצבה קדימה

$$\begin{cases}1\cdot y_{11}=1 \longrightarrow y_{11}=1\\ 3\cdot y_{11}+1\cdot y_{21}=0 \longrightarrow y_{21}=-3\\ 2\cdot y_{11}+\frac{9}{4}\cdot y_{21}+1\cdot y_{31}=0 \longrightarrow y_{31}=\frac{19}{4}=4.75\end{cases}$$

$$\vec{y}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\4.75\end{pmatrix}$$

$$U\begin{pmatrix}|\\X_1\\|\end{pmatrix}=\vec{y}_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4.75 \end{pmatrix}$$

הצבה לאחור:

$$\begin{cases} 6.5 \cdot X_{31} = 4.75 & \rightarrow X_{31} = 0.7308 \\ -4 \cdot X_{21} - 2 \cdot X_{31} = -3 & \rightarrow X_{21} = 0.3846 \\ 1 \cdot X_{11} + 3 \cdot X_{21} + 2 \cdot X_{31} = 1 & \rightarrow X_{11} = -1.6154 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} | \\ X_1 \\ | \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.6154 \\ 0.3846 \\ 0.7308 \end{bmatrix}$$

עמודה 2:

$$A\begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L \underbrace{U \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{bmatrix}}_{y_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} L y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ U\begin{pmatrix} | \\ X_2 \\ | \end{pmatrix} = y_2 \end{cases}$$

עמודה 3:
קווים דומה:

$$A\begin{bmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L \underbrace{U \begin{bmatrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \end{bmatrix}}_{y_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} L \vec{y_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ U\begin{pmatrix} | \\ X_3 \\ | \end{pmatrix} = \vec{y_3} \end{cases}$$

פתרון סופי:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1.6154 & 0.9231 & -0.0769 \\ 0.3846 & -0.0769 & -0.0769 \\ 0.7308 & -0.3462 & 0.1538 \end{bmatrix}$$

האם תמיד קיים פתרון LU?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$l_{11} \cdot U_{11} = 0$

$U_{11} = 0$ או $l_{11} = 0$

אם $l_{11}=0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

לא נקבל את 1!!

$0\cdot u_{12}+0\cdot u_{22}=1$

סתירה!

אם $u_{11}=0$:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

לא נקבל: את 2

$l_{21}\cdot 0+l_{22}\cdot 0=2$

סתירה!

$\det(A)=-2$ $\qquad$ $\det(L)\cdot\det(U)=0$

לחילופין אפשר להסתכל על חישוב הדטרמיננטה

$\det(L)\cdot\det(U)=\det(A)$

מסקנה:

לא תמיד קיים פירוק (למשל כאשר איבר הציר (על האלכסון הראשי) מתאפס)

לכן נעשה פירוק PLU שהוא תמיד קיים

P = מטריצת פרמוטציות

L = משולשית תחתונה

U = משולשית עליונה

הערה: פירוק PLU תמיד קיים ומתקיים!

$PA=LU$

פירוק PLU דומה לפירוק LU רק שהפעם אנחנו משתמשים בהחלפת שורות בלבד (Partial Pivoting)

P מטריצה המייצגת החלפת שורות

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כל החלפת שורות כלשהי ב- A

מחליפים את אותן שורות ב- P

(כל פעם על P מחדש)

<u>דוגמא</u>

קבע פירוק PLU למטריצה A

$$A=\begin{bmatrix} -6 & -1 & 3.25 & 10.25 \\ 12 & 2 & 1 & 0 \\ 2.4 & 10.4 & -1.8 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix} \qquad P_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} A_1=\begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 3.25 & 10.25 \\ 2.4 & 10.4 & -1.8 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix} \qquad P_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2} \qquad m_{31}=\frac{a_{31}}{a_{11}}=\frac{2.4}{12}=\frac{1}{5} \qquad m_{41}=\frac{a_{41}}{a_{11}}=0$$

$$\begin{array}{l} \\ R_2 \to R_2 - m_{21}R_1 \\ \\ R_3 \to R_3 - m_{31}R_1 \end{array} \quad A_2=\begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix} \qquad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \leftrightarrow R_2 \quad A_3=\begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 0 & 1 & 14.8 & 1.2 \end{bmatrix} \qquad P_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{m_{42}=\frac{a_{42}}{a_{22}}=\frac{1}{10}}$$

$$R_4 \to R_4 - m_{42}R_2 \quad A_4=\begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \end{bmatrix} \qquad P_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \leftrightarrow R_4 \quad A_5=\begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 3.75 & 10.25 \end{bmatrix} \qquad P_5=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_{43} = \frac{a_{43}}{a_{33}} = \frac{1}{4}$$

$$R_4 \to R_4 - m_{43} R_3$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = A_6$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגול 5

פירוק SVD

singular values decomposition

מטריצות ריבועיות $A^{n\times n}$ ניתן ללכסן כאשר

$$A = P\cdot D\cdot P^{-1} = P\cdot D\cdot P^{T}$$

P אורתו' אז $=P^{-1}$

בעיה כאשר $A^{m\times n}$ אז לא ידוע איך ללכסן אותה ?

במקרה זה נעזר בפירוק SVD.

הערה: למטריצה ריבועית יתכן שהפירוק SVD שלה שונה מהלכסון

טענה: למטריצה סימטרית ובעלת ערכים עצמיים אי שליליים הפירוק SVD והלכסון (הרגיל) מתלכדים

הגדרה: מטריצה P נקראת אורתוגונלית אם $P\cdot P^T = P^T P = I$

כלומר $P^{-1} = P^T$

הגדרה: פירוק SVD של מטריצה $A^{m\times n}$ זוהי הצגה של

$$A = U\Sigma V^T$$

$V^{n\times n}$, $U^{m\times m}$, $\Sigma^{m\times n}$

כאשר U,V הן מטריצות אורתוגונליות

Σ היא מטריצה $m\times n$ אלכסונית כלומר

$$\Sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \sigma_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m-n$ שורות אפסים

כאשר $p = \min\{m,n\}$ $\quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p$

הערכים $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ נקראים הערכים הסינגולריים של A

המטריצה כשהיא מכפילה וקטור היא מסובבת אותו ומותחת

$$A = U \Sigma V$$

U – סיבוב

Σ – מתיחה כשחיובית רק כשפסיליות

V – עוד סיבוב

$AV_i = \sigma_i u_i$

$$A \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_i \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_i \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_n \\ 0 & & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$AV = U\Sigma \qquad / \cdot V^T$$

$$A = V\Sigma V^T$$

<u>טענה:</u> (1) המספרים σ_j^2 עבור $j=1,\dots,p$ הם הערכים העצמיים

של AA^T וגם של A^TA

כלומר ל-2 המטריצות הנ"ל יש אותם ע"ע

<u>הוכחת טענה:</u>

$$A^TA = (U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T)$$

$$= V\Sigma^T \underbrace{U^T \cdot U}_{U \text{ אורתוגונלית } U^T=U^{-1}}\Sigma V^T = V\underbrace{\Sigma^T\Sigma}_{\text{אלכסונית}} V^T = V\Sigma^2V^T$$

$U^TU=I$ $\qquad$ $\Sigma^T=\Sigma$

$$A^TA = V\Sigma^2V^T$$

$$AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma \underbrace{V^T V}_{I} \Sigma^T U^T$$

$$= U\Sigma^2U^T$$

$$A^TA = V\Sigma^2V^T$$

$$AA^T = U\Sigma^2U^T$$

נשים לב שע"ע של Σ^2 הם $\sigma_1^2,\dots,\sigma_p^2$

מטריצה C דומה ל-D

$C \sim D$

אם קיימת P אורתוגונלית כך ש:

$$C = \underset{\text{אורתוגונלית}}{P} \cdot \underset{\text{אלכסונית}}{D} \cdot P^T$$

למטריצות דומות יש אותם ע"ע

קיבלנו $A^TA,\ AA^T \sim \Sigma^2$

ולכן הערכים עצמיים של A^TA ושל AA^T

הם $\sigma_1^2,\dots,\sigma_p^2$

טענה ② הווקטורים $\vec{V}_1,\dots,\vec{V}_n$ הם וקטורים עצמיים
של A^TA ו- $\vec{U}_1,\dots,\vec{U}_n$ הם
וקטורים עצמיים של AA^T

טענה ③ עבור $j=1,\dots,n$ הווקטורים
$AV_j=\sigma_j U_j$ אורתו

שיטה למציאת פירוק SVD

נניח כי $A^{m\times n}$, כאשר $m\ge n$ אז נתמקד ב
ונקבל ש A^TA הינו מטריצה סימטרית $B=A^TA$, ואי שליליות.
אם $m<n$ מגדירים $B=AA^T$ מטריצה סימטרית
מגודל $m\times m$

עיקרי השיטה

① מלכסנים לכסון ל-A^TA כאמור נקבל את

$$A^TA=V D V^T$$

ו"ע של A^TA
ע"ע של A^TA

כאשר העמודות של V
הן אורתונורמליות של A^TA
ו-D מטריצה אלכסונית שעל אלכסונה יש n מספרים אי שליליים
בסדר יורד

כאמור
$$\sigma_1^2\ge\sigma_2^2\ge\dots\ge\sigma_n^2\ge 0$$
את העמודות של V נסמן כמו $V_1,\dots,V_n$

② מגדירים מטריצה S $n\times n$ כך ש $D=S^2$
$$S_{ii}=\sqrt{d_{ii}}$$
ומשלימים אפסים עד גודל, $m\times n$ ומקבלים:

מטריצה
$$\Sigma_{m\times n}=\begin{pmatrix}S\\0\end{pmatrix}=\left(\begin{matrix}\sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots\ \sigma_n\end{matrix}\right)$$

③ מגדירים מטריצה $U_{m\times m}$ ע שעמודותיה מנורמלות ומקיימות את

הקשר $u_j = \frac{1}{\sigma_j} A v_j$

עבור $j = 1, 2, \dots, \min\{m, n\}$

אם $p < m$ אז משלימים את הקבוצה האורתונורמלית

$u_j = \frac{1}{\sigma_j} A v_j$

עד לבסיס ל- $\mathbb{R}^m$ ע"י אורתוגונליזציה של גרהם שמידט

$$U_{m\times m} = \begin{pmatrix} | & & | & | & & | \\ u_1 & \cdots & u_p & \underbrace{u^*_{p+1} \; \cdots \; u^*_m}_{\text{וקטורים שמוסיפים צריכים להיות אורתוגונליים לשאר ומנורמלים}} \\ | & & | & | & & | \end{pmatrix} \quad m\times m$$

דוגמא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

מצא ל- A פירוק SVD

פתרון:

$m = 3$
$n = 2$

לפי אלגוריתם כאשר $m \geq n$ מסתכלים על $A^T A$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow$$ יצאה לנו מט' אלכסונית, לא תמיד זה ככה בד"כ נצטרך ללכסן

קיבלנו $A^T A$ כבר אלכסונית

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \Sigma^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = \sqrt{2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{1} = 1$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נוודא שהע"ע יהיה בסדר יורד $\sigma_1 \geq \sigma_2$

(ג'3) אותם בסדר יורד ונשנה את סדר העמודות של

V, V^T

$$D=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$V=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad V^T=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$A^TA=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{V}\underbrace{\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}_{V^T}$$

$$S=\sqrt{D}=\begin{pmatrix}\sqrt2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Sigma_{m\times n}=\Sigma_{3\times2}=\begin{pmatrix}\sqrt2&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}}$$

$$V_{2\times2}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

<u>שלב 3</u> מציאת u: $j=1,\dots,\underbrace{\min\{2,3\}}_{p}$ עבור

$j=1,2$

$Av_j=\sigma_j u_j$

$Av_1=\sigma_1 u_1$

$Av_2=\sigma_2 u_2$

$U_{m\times m}=U_{3\times3}$

$$\begin{pmatrix}|&|&|\\u_1&u_2&u_3\\|&|&|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&|\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&u_3\\-\frac{1}{\sqrt2}&0&|\end{pmatrix}$$

$$AV_1=\sigma_1u_1$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\sqrt2\,u_1$$

$$\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\sqrt2\,u_1\rightarrow u_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-1/\sqrt2\\-1/\sqrt2\end{pmatrix}}_{\text{וקטור מנורמל}}$$

$$AV_2=\sigma_2u_2$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot u_2$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=u_2$$

מכיוון ש: $p=2<m$ נצטרך להשלים וקטור ל- U

נשלים $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. צריך שיהיה אורתוגונלי ל- u_1, u_2.

$\langle u,v\rangle = u^T \cdot v$

u_3 לא אורתוגונלי ל- u_1 אז נתקן אותו באמצעות

גרהם שמידט

$$u_3^* = u_3 - \frac{\langle u_1, u_3\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 - \frac{\langle u_2, u_3\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2$$

$$= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix} - 0$$

$$= \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{נרמול}} \frac{u_3^*}{\|u_3\|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}{\sqrt{0^2+\frac{1}{2}^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\begin{pmatrix}0\\0.5\\-0.5\end{pmatrix}}{\frac{1}{\sqrt2}}$$

$$u_3^{**} = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^T = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-\frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}}_{U_{3\times3}} \underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}}_{\Sigma_{3\times2}} \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}}_{V^T_{2\times2}}$$

סיבוב　　　מתיחה　　　סיבוב

פירוק SVD במטלב:

[S, V, D] = svd(A)

דוגמא נוספת

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

מצאו פירוק SVD

$$A_{2\times 2}$$

פתרון:

$$B=A^TA=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

נמצא ע"ע של A^TA

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-1=0$$

$$(\lambda-1)^2=1$$

$$\lambda-1=-1 \qquad \lambda-1=1$$

$$\lambda=0 \qquad \lambda=2$$

$$D=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

נמצא וקטורים עצמיים

עבור $\lambda=2$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2-1&-1&0\\-1&2-1&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_2+R_1\to R_2]{}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{תלוי}&\text{חופשי}&\end{array}\\\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\end{array}$$

$$V_1-V_2=0$$
$$V_1=V_2$$

$$V_{\lambda=2}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{נרמול}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

עבור $\lambda=0$

$$\left(\begin{array}{cc|c}0-1&-1&0\\-1&0-1&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\-1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_2=R_1-R_2]{}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{תלוי}&\text{חופשי}&\end{array}\\\left(\begin{array}{cc|c}-1&-1&0\\0&0&0\end{array}\right)\end{array}$$

$$-V_1-V_2=0$$
$$-V_1=V_2$$

$$V_{\lambda=0}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{נרמול}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

$$A^TA=VDV^T=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}}_{V}\underbrace{\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}}_{V^T}$$

$$\Sigma=\sqrt{D}\rightarrow \quad \Sigma_{2\times2}\begin{pmatrix}\sqrt2&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$U_{2\times 2}$ (3N)

$j=1,\dots,\underbrace{\min\{2,2\}}_{p=2}$ עבור

$j=1,2$

$Av_j=\sigma_j u_j$

$Av_1=\sigma_1 u_1$

$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}=\sqrt2\, u_1$

$\begin{pmatrix}\sqrt2\\0\end{pmatrix}=\sqrt2\, u_1 \rightarrow u_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$Av_2=\sigma_2 u_2$

$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}=0\cdot u_2$

$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\cdot u_2$

לא ניתן למצוא u_2

מהקשר $Av_2=\sigma_2 u_2$

נשלים את u_2 . [illegible] בסיס ה-$\mathbb{R}^2$

$U=\begin{pmatrix}1&|\\0&u_2\\&|\end{pmatrix}$

u_2 צריך להיות אורתוגונלי ל $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ומנורמל.

ניקח $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (כי הוא מנורמל ומאונך ל- $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$)

$U_{2\times2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{pmatrix}\sqrt2&0\\0&0\end{pmatrix}}_{\Sigma}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}}_{V^T}$$

שיטת ריבועים מינימליים (רגרסיה לינארית)

הגדרת הבעיה

נתונה סדרה של נקודות $(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)$ ונרצה לקנות פולינום ממעלה נמוכה כך ש

$$p(x_i)\approx y_i$$

כלומר נרצה להביא למינימום את הנורמה של

$$\|p(x)-y\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n}(p(x_i)-y_i)^2}$$

$$S=\sum_{i=0}^{n}(p(x_i)-y_i)^2$$

נגדיר את הפונקציה

דוגמה: לקו $p=ax+b$

$$S=\sum_{i=0}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

נגזור את S לפי a ולפי b ונשווה ל-0

$$0=\frac{\partial S}{\partial a}=2\sum_{i=0}^{n}(ax_i+b-y_i)\cdot x_i \quad /:2$$

$$0=\frac{\partial S}{\partial b}=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i) \quad /:2$$

$$\sum_{i=0}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i=0$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{i=0}^{n} ax_i^2+bx_i-y_ix_i=0$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{i=0}^{n}ax_i^2+\sum_{i=0}^{n}bx_i-\sum_{i=0}^{n}x_iy_i=0$$
$$* \quad a\sum_{i=0}^{n}x_i^2+b\sum_{i=0}^{n}x_i=\sum_{i=0}^{n}x_iy_i$$

$$\sum_{i=0}^{n}ax_i+b-y_i=0$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{i=0}^{n}ax_i+\sum_{i=0}^{n}b=\sum_{i=0}^{n}y_i=0$$
$$* \quad a\sum_{i=0}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}1=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

נציג את * בצורה מטריצית

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}x_i^2 & \sum_{i=0}^{n}x_i\\ \sum_{i=0}^{n}x_i & \sum_{i=0}^{n}1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}x_iy_i\\ \sum_{i=0}^{n}y_i\end{pmatrix}$$

$$p(x) = ax + b \approx y$$

זו שיש לה קטום פיתרון

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Bigg] \cdot A^T$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

זאת מערכת ריבועית - קטונה קיים פתרון

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

התהליך של הכפלה ב- A^T

משמאל נקרא רגולציה

תרגול 6

ריבועים מינימליים

נתונה סדרת נקודות $(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)$

ונרצה לקבל פולינום ממעלה נמוכה כך שיתקיים

$p(x_i) \approx y_i$

כלומר נרצה להביא למינימום את הנורמה

$$\| p(x)-y \| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (p(x_i)-y_i)^2}$$

למצוא את המינימום של מה שמתחת השורש ← מינימום של השורש

נגדיר:

$$S = \sum_{i=0}^{n} (p(x_i)-y_i)^2$$

נמצא מינימום של S.

$$p(x) = ax+b$$

$$S = \sum_{i=0}^{n} (ax_i+b-y_i)^2$$

נגזור לפי a, b

$$(*) \quad \frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=0}^{n} 2(ax_i+b-y_i)x_i = 0$$

$$(**) \quad \frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=0}^{n} 2(ax_i+b-y_i) = 0$$

$$(*) \quad \sum_{i=0}^{n} ax_i^2+bx_i-y_ix_i = 0 \rightarrow \sum_{i=0}^{n} ax_i^2 + \sum_{i=0}^{n} bx_i - \sum_{i=0}^{n} y_ix_i = 0$$

$$(**) \quad \sum_{i=0}^{n} ax_i+b-y_i = 0 \rightarrow \sum_{i=0}^{n} ax_i + \sum_{i=0}^{n} b - \sum_{i=0}^{n} y_i = 0$$

$$\left.\begin{aligned} (*) \quad & a\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_ix_i \\ (**) \quad & a\sum_{i=0}^{n} x_i + b\sum_{i=0}^{n} 1 = \sum_{i=0}^{n} y_i \end{aligned}\right\}$$

מערכת משוואות לינארית

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \\ \sum_{i=0}^{n} y_i \end{pmatrix}$$

תרגול

מצאו קו ישר שהוא הקירוב הטוב ביותר

מבחינת ריבועים מינימליים לנתונים הבאים

x	0.3	0.4	0.6	0.8
y	1	0.9	1.2	1.5

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.3 & 1 \\ 0.4 & 1 \\ 0.6 & 1 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9 \\ 1.2 \\ 1.5 \end{pmatrix} \quad \Big| \cdot A^T \text{ משמאל}$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{3} x_i^2 & \sum_{i=0}^{3} x_i \\ \sum_{i=0}^{3} x_i & \sum_{i=0}^{3} 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{3} x_i y_i \\ \sum_{i=0}^{3} y_i \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1.25 & 2.1 \\ 2.1 & 4 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\tilde{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2.58 \\ 4.6 \end{pmatrix}}_{\tilde{b}}$$

לפי מהבורה:

נפתור $\hat{X} = \hat{A}^{-1}\hat{b}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.118 \\ 0.5627 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y = 1.118x + 0.5627}$$

עבור פולינום $\quad p(x) = ax^2 + bx + c$

$$ax_i^2 + bx_i + c \approx y_i$$

אפשרות 1:

$$S = \sum_{i=0}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

נגזור לפי a,b,c

אפשרות 2

$$ax_i^2+bx_i+c\cdot 1\approx y_i$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1\\ x_2^2 & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_n^2 & x_n & 1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\quad \Big|\cdot A^T$$

משמאל

$$\underset{3\times n}{\begin{pmatrix} x_1^2 & \cdots & x_n^2\\ x_1 & & x_n\\ 1 & & 1\end{pmatrix}}\underset{n\times 3}{\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_n^2 & x_n & 1\end{pmatrix}}\underset{3\times 1}{\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}=\underset{3\times n}{\begin{pmatrix} x_1^2 & \cdots & x_n^2\\ x_1 & \cdots & x_n\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}}\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n x_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2\\ \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i\\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n x_i^2 y_i\\ \sum_{i=1}^n x_i y_i\\ \sum_{i=1}^n y_i\end{pmatrix}$$

תרגיל

לפניכם תוצאות של תצפיות:

x	2.2	2.5	3.5	4	5	7	10	13
y	1.5	10	4	4.5	3	3	1.5	2.5

ידוע שהפונק מתנהגת כמו $f(x)=\frac{1}{d_1x+d_0}$

מצאו את d_1, d_0 בעזרת רגרסיה לינארית

פתרון

נגדיר $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ ונקבל

$$g(x)=d_1x+d_0$$

נעשה מינימום לפונק S

$$S=\sum_{i=1}^{8}\left(d_1x_i+d_0-\frac{1}{y_i}\right)^2$$

$$\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^8 x_i^2 & \sum_{i=1}^8 x_i\\ \sum_{i=1}^8 x_i & \sum_{i=1}^8 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^8 \frac{x_i}{y_i}\\ \sum_{i=1}^8 \frac{1}{y_i}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 382.34 & 47.2 \\ 47.2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.36 \\ 2.11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = \tilde{A}^{-1}\tilde{b}$$

$$d_1 = 0.0283$$

$$d_0 = 0.0963$$

$$f(x) = \frac{1}{0.0283x + 0.0963}$$

<u>תרגיל</u> דרוש למצוא a,b $\quad y_i \approx ae^{bx_i}$

x	0	1/2	1	1.5	2
y	1.1	1.4	1.3	2.3	3

א. למצוא a,b בעזרת רגרסיה לינארית

ב. מוצאים $S-e$ מינימלי אז מתקיים $\quad a\sum x_i e^{2bx_i} = \sum x_i y_i e^{bx_i}$

$$a\sum e^{2bx_i} = \sum y_i e^{bx_i}$$

<u>פתרון</u>

$$y_i \approx ae^{bx_i}$$

א. ניקח $\ln$ לשני האגפים!

$$\ln(y_i) = \ln(ae^{bx_i})$$

$$\ln(y_i) = \ln(a) + \ln(e^{bx_i})$$

$$\ln(y_i) = \tilde{a} + bx_i$$

$$S = \sum_{i=1}^{5}(\hat{a} + bx_i - \ln(y_i))^2$$

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ \hat{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i \ln(y_i) \\ \sum \ln(y_i) \end{pmatrix}$$

$$b = 0.5$$

$$a = 1.1$$

$$f(x) = 1.1e^{-\frac{x}{2}}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} (a e^{bx_i} - y_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^{n} (a e^{bx_i} - y_i) e^{bx_i} = 0$$

$$0 = \sum (a e^{2bx_i} - y_i e^{bx_i}) = 0$$

$$\sum a e^{2bx_i} = \sum y_i e^{bx_i}$$

$\blacksquare$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^{n} (a e^{bx_i} - y_i) a x_i e^{bx_i} = 0$$

$$0 = \sum a^2 e^{2bx_i} x_i - a y_i x_i e^{bx_i}$$

$$\sum a^2 e^{2bx_i} x_i = \sum a y_i x_i e^{bx_i} \quad | : a \neq 0$$

$$\sum a x_i e^{2bx_i} = \sum y_i x_i e^{bx_i}$$

$\blacksquare$

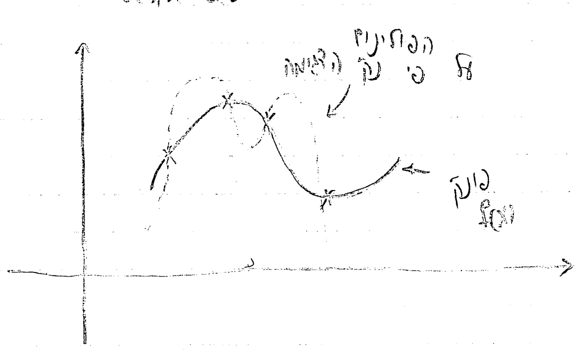
אינטרפולציה

x_0	x_1	$\dots$	x_n
y_0	y_1	$\dots$	y_n

דרך $n+1$ נק' דגימה

עובר פולינום מדרגה n

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$



$$\forall i \quad P_n(x_i) = f(x_i)$$

מערכת משוואות לינאריות

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = f(x_0) \\ \vdots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = f(x_n) \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{מטריצת ונדרמונד הפיכה}} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

המטרה: למצוא $a_0, \dots, a_m$ אבל המטריצה מלאה ולכן יש חריגה

חישובים לעשות

נלמד אינטרפולציה של לגרנז'

הגדרה: אינטרפ' לגרנז' קו/נקודות $n+1$ פונק' קסים שהם

פולינומים ממעלה 0 עד n נקראים אינטרפולציה פולינומית

נשים לב: אם יש n נק' דגימה → דרגת הפולינום

$m = n-1$

נגדיר פולינום אינט' של לגרנז'

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{m} f(x_i) \cdot L_i(x)$$

המשקולות של לגרנז':

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

הערות: ① כמס נקודות הדגימה כך כמות L_i שצריך לחשב

② $L_i(x)$ הם פונק' של x

③ מתקיים
$$\begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ L_i(x_j) = 0 \end{cases}$$

נתונות: $\begin{matrix} x_1\ y_1 & x_2\ y_2 & x_3\ y_3 \\ (0,0) & (1,1) & (2,4) \end{matrix}$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x_1-1)(x_1-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(x_2-0)(x_2-2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{-1}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(x_3-0)(x_3-1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{2}$$

$$P_2(x) = L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2 + L_3(x)y_3$$

דרגת הפולינום

$$P_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}y_1 - x(x-2)y_2 + \frac{x(x-1)}{2}y_3 = -x(x-2) + 2x(x-1)$$

$$P_2(x) = x^2$$

הערה: אם $y_i=0$. לא צריך לחשב את $l_i(x)$ כי בפולינום מכפלים את $y_i \cdot l_i(x)$ ולכן זה מתאפס.