

אלגברה לינארית תרגול 6

21 ביולי 2020

1 מרחבים וקטוריים

1.1 חיתוך וסכום ת"מ

תרגילים:

$$.W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \begin{matrix} a + b = c + d \\ -a + 2c = 0 \end{matrix} \right\}, W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : \begin{matrix} a - b - 5c = d \\ 4b + 8c - 2d = 2a \end{matrix} \right\} \text{ עבור } 1.$$

$.W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ מצאו את

פתרון: נשים לב ש- W_1, W_2 הם אוסף הפתרונות של המערכות ההומ':

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

כדי לדבר על הסכום, ננמצא תחילה את אוסף הפתרונות של כל מערכת. מתקיים שלאחר דירוג נקבל:

$$A_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

לכן נקבל:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2s \\ t - s \\ s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$
$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 5a + 2b \\ -2a - b \\ b \\ a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

ולכן נקבל:

$$W_1 + W_2 = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : a, b, t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לגבי החיתוך: פתרון של מערכת A_1 וגם מערכת A_2 הוא בעצם פתרון של המערכת:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

כדי למצוא פתרון, נדרג. כיון שכבר דירגנו כל מערכת בנפרד, נותר לדרג את תוצאת

הדירוג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

2. מצאו סכום וחיתוך של:

$$W_1 = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} : \forall i < j A_{i,j} = 0\}, W_2 = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} : \forall i > j A_{i,j} = 0\}$$

פתרון: בחיתוך מתחייב שמחוץ לאלכסון אפסים, ואלכסון מה שרוצים, מה שנקרא - אוסף האלכסוניות.

$$W_1 \cap W_2 = \{A \in \mathbb{F}^{n \times n} : \forall i \neq j A_{i,j} = 0\}$$

לגבי הסכום - טענה $W_1 + W_2 = \mathbb{F}^{n \times n}$. תהי A מטריצה. ניקח:

$$(A_1)_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases} \in W_1$$

$$(A_2)_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases} \in W_2$$

ושימו לב ש- $A = A_1 + A_2$.

3. מצאו חיתוך וסכום של:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_1 = \dots = a_n \right\}, W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : \sum_{i=1}^n a_i = 0 \right\}$$

פתרון: לגבי החיתוך: יהי $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$ לכן כל הרכיבים שווים וסכומם 0, ונקבל:

$$0 = \sum_{i=1}^n a_i \stackrel{\forall i: a_i = a_1}{=} n a_1 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow \forall i : a_i = 0$$

ולכן $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

לגבי הסכום: טענה: $W_1 + W_2 = \mathbb{F}^n$. הוכחה: יהי $v \in \mathbb{F}^n$, צריך למצוא וקטור

$$b = \begin{pmatrix} \frac{t}{n} \\ \vdots \\ \frac{t}{n} \end{pmatrix} \in W_1, a \in W_2 \text{ כך ש- } a + b = v$$

נסמן $t = \sum_{i=1}^n v_i$, ניקח $a \in W_2$, נדרש: $\forall i : a_i = v_i - b_i = v_i - \frac{t}{n}$

נחשב שאכן $a \in W_2$:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (v_i - \frac{t}{n}) = \left(\sum_{i=1}^n v_i \right) - t = t - t = 0$$

מכאן נגיע להגדרת סכום ישר: בהינתן שני מרחבים $W_1, W_2 \leq V$ נאמר שהסכום

$W_1 + W_2$ הוא ישר, ונסמן $W_1 \oplus W_2$ אם $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. בדוגמאות לעיל נקבל:

• דוגמא 2: $W_1 + W_2 = \mathbb{F}^{n \times n}$ סכום לא ישר, כי החיתוך יותר מוקטור האפס.

• דוגמא 3: $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{F}^n$ סכום ישר.

1.2 אי-תלות ופרישה

תרגילים:

1. יהא V מ"ו, $S_1, S_2 \subseteq V$. הוכיחו: אם $S_1 \subseteq S_2$ אז $\text{span}(S_1) \subseteq \text{span}(S_2)$. פתרון: יהא $v \in \text{span}(S_1)$ לכן v צירוף לינארי של וקטורים מ- S_1 . כלומר, קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ ו- $v_1, \dots, v_k \in S_1$ כך ש-

$$v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$$

עכשיו, מהעובדה $S_1 \subseteq S_2$ נקבל ש- $v_1, \dots, v_k \in S_2$ ולכן v צ"ל של וקטורים מ- S_2 , ואז $v \in \text{span}(S_2)$.

שים לב שעבור $S_1 = S_2 = \{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ נקבל $\text{span}(S_1) = \mathbb{R}^2 \not\subseteq S_2$ אם S_2 היה ת"מ אז היה מתקיים $S_1 \subseteq \text{span}(S_1) \subseteq S_2$.

2. יהא V מ"ו, $v_1, v_2 \in V$. הוכיחו: v_1, v_2 ת"ל אמ"ם (v_1 כפולה של v_2 או v_2 כפולה של v_1).

פתרון: \Leftarrow v_1, v_2 ת"ל אמ"ם קיים צ"ל לא טריוויאלי שנותן 0 אמ"ם $\exists(\alpha, \beta) \neq (0, 0) : \alpha v_1 + \beta v_2 = 0$ ולכן בה"כ $\alpha \neq 0$ אז $v_1 = -\frac{\beta}{\alpha} v_2$. \Rightarrow בה"כ $v_1 = \alpha v_2$ אז $1 \cdot v_1 - \alpha v_2 = 0$, שהוא צ"ל לא טריוויאלי, ולכן v_1, v_2 ת"ל.

3. במרחב $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ נגדיר:

$$S = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(א) מצאו מטריצה $A \notin \text{span}(S)$, אם אפשר.

(ב) האם S בת"ל?

פתרון: א. תהי $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. נראה מה התנאים לקבל $A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3$ את המערכת הבאה:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + a_3 = a \\ a_1 - a_3 = b \\ a_2 + a_3 = c \\ a_1 + 3a_2 = d \end{cases}$$

נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 1 & 3 & 0 & d \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -2 & d-b-3c \\ 0 & 0 & 0 & a-b-2c \end{array} \right)$$

ולכן $a-b-2c=0 \iff A \in \text{span}(S)$, ולכן המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin \text{span}(S)$.

ב. נשים לב ש- S בת"ל אמ"ם $a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$ כלומר, S בת"ל אמ"ם אין פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומ' $a_3 = 0$.

דירגנו וראינו שאין משתנה חופשי, ולכן יש פתרון יחיד למערכת ההומ', הלא הוא הפתרון הטריוויאלי. לכן S בת"ל.

4. יהא V מ"ו, $A, B \subseteq V$ קב'. הוכיחו או הפריכו:

(א) $\text{span}(A) \Delta \text{span}(B) \subseteq \text{span}(A \Delta B)$

(ב) $\text{span}(A) \Delta \text{span}(B) \supseteq \text{span}(A \Delta B)$

פתרון: ב. צד ימין זה פרישה של משהו, לכן זה בוודאי ת"מ. מצד שמאל - האם זה ת"מ? בהכרח לא: $0 \notin \text{span}(A) \Delta \text{span}(B)$ ולכן כמובן $\text{span}(A) \Delta \text{span}(B) \not\subseteq \text{span}(A \Delta B)$. יותר חזק מהפרכה, הוכחנו שתמיד לא נכון.

א. ננסה להוכיח: $v \in \text{span}(A) \Delta \text{span}(B)$ לכן אם $v \in \text{span}(A) \setminus \text{span}(B)$ אז יש $v_1, \dots, v_n \in A$ כך ש- $v = \sum \alpha_i v_i$, וכן שכל צ"ל של וקטורים מ- B לא נותן את v . האם בהכרח כל הוקטורים מ- $A \Delta B$? לא בהכרח: חלקם אמנם כן, אבל לאו דווקא כולם.

הפרכה: $V = \mathbb{R}^2, A = \{e_1, e_2\}, B = \{e_1\}$ ואז $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{span}(A) \Delta \text{span}(B) \setminus \text{span}(A \Delta B)$.
 $\text{span}(A \Delta B) = \text{span}(e_2)$