לינארית 2 תשפ"ד אביב מועד ב

מרצה: ד"ר עדי בן צבי.
מתרגלים: עידו גולדנברג, עידו פלדמן.
יש לענות על כל שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 108 נק.
זמן הבחינה: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד
המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.
יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה. יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

1. נסחו והוכיחו קריטריון נורמליות. (15 נק)

2. נתבונן ב $\mathbb{R}^3$ עם המ"פ הבאה:

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} >:= \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{1}{4}y_1y_2 + z_1z_2$$

ונגדיר $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ על ידי $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x+y \\ x+3y \\ 4z \end{pmatrix}$

(א) (10 נק) האם T צל"ע? (ביחס למ"פ הנתונה).
(ב) (8 נק) מצאו את צורת הז'ורדן של T.
(ג) (9 נק) מצאו את הוקטורים העצמיים של T ביחס לכל אחד מהע"ע.

3. (11 נק) יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ויהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ הפורשים את $\mathbb{R}^n$. הוכיחו כי קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים ש v_i הוא ו"ע של A עבור ע"ע λ_i.

4. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (7 נק לכל מהשלושה הבאים)

(א) יהי V ממ"פ נ"ס. ותהיינה $T, S : V \longrightarrow V$ הע"ל מתחלפות (כלומר, $TS = ST$)
 i. אם T, S אוניטריות אזי $T + S$ אוניטרית.
 ii. אם T, S נילפוטנטיות אזי $T + S$ נילפוטנטית.
(ב) תהי $A \in \mathbb{C}^{10\times 9}$. אזי קיים למטריצה AA^t ע"ע 0 .

5. בשאלה זו ניתן להסתמך על סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.

יהי Vממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$ (נסמן את המ"פ $<,>$), ותהי $T : V \longrightarrow V$ הע"ל צל"ע כך שכל הע"ע שלה חיוביים (גדולים ממש מ 0)

(א) (12 נק) הוכיחו כי קיימת הע"ל $R : V \longrightarrow V$ צל"ע כך ש $T = RR^*$. (**רק בסעיף זה:** מי שאיננו מצליח, הוכחה עבור מטריצות תזכה גם היא בכמה נקודות)
(ב) (10 נק) עבור T הנ"ל נתבונן במ"פ הנתונה $<,>$. ונגדיר את המכפלה הבאה: לכל $v, u \in \mathbb{C}^n$:

$$< v, u >' := < Tv, u >$$

הוכיחו כי זוהי מ"פ על V.
(ג) (12 נק) תהי T כנ"ל ותהי $S : V \longrightarrow V$ צל"ע. הוכיחו כי ST לכסינה.

בהצלחה!!

<u>שאלה 1:</u> נסחו והוכיחו קריטריון נורמליות. (15 נק)

<u>פתרון:</u>

פתרון שאלה 1 (המשך)

<u>שאלה 2:</u> נתבונן ב $\mathbb{R}^3$ עם המ"פ הבאה:

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} >:= \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{1}{4}y_1y_2 + z_1z_2$$

ונגדיר $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ על ידי $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x+y \\ x+3y \\ 4z \end{pmatrix}$

1. (10 נק) האם T צל"ע? (ביחס למ"פ הנתונה).
2. (8 נק) מצאו את צורת הז'ורדן של T.
3. (9 נק) מצאו את הוקטורים העצמיים של T ביחס לכל אחד מהע"ע.

<u>פתרון:</u>

פתרון שאלה 2 (המשך)

פתרון שאלה 2 (המשך)

פתרון שאלה 2 (המשך)

שאלה 3: (11 נק) יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ויהיו $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ הפורשים את $\mathbb{R}^n$. הוכיחו כי קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים ש v_i הוא ו"ע של A עבור ע"ע λ_i.

פתרון:

פתרון שאלה 3 (המשך)

<u>שאלה 4:</u> הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות: (7 נק לכל מהשלושה הבאים)

1. יהי V ממ"פ נ"ס. ותהיינה $T, S : V \longrightarrow V$ הע"ל מתחלפות (כלומר, $TS = ST$)

   (א) אם T, S אוניטריות אזי $T + S$ אוניטרית.

   (ב) אם T, S נילפוטנטיות אזי $T + S$ נילפוטנטית.

2. תהי $A \in \mathbb{C}^{10\times 9}$. אזי קיים למטריצה AA^t ע"ע 0 .

<u>פתרון שאלה 4:</u>

פתרון שאלה 4 (המשך)

פתרון שאלה 4 (המשך)

שאלה 5: בשאלה זו ניתן להסתמך על סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.

יהי Vממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$ (נסמן את המ"פ $<,>$), ותהי $T : V \longrightarrow V$ הע"ל צל"ע כך שכל הע"ע שלה חיוביים (גדולים ממש מ 0)

1. (12 נק) הוכיחו כי קיימת הע"ל $R : V \longrightarrow V$ צל"ע כך ש $T = RR^*$. (**רק בסעיף זה:** מי שאיננו מצליח, הוכחה עבור מטריצות תזכה גם היא בכמה נקודות)

2. (10 נק) עבור T הנ"ל נתבונן במ"פ הנתונה $<,>$. ונגדיר את המכפלה הבאה: לכל $v, u \in \mathbb{C}^n$:

$$< v, u >' := < Tv, u >$$

הוכיחו כי זוהי מ"פ על V.

3. (12 נק) תהי T כנ"ל ותהי $S : V \longrightarrow V$ צל"ע. הוכיחו כי ST לכסינה.

פתרון:

<u>פתרון שאלה 5 (המשך)</u>

<u>פתרון שאלה 5 (המשך)</u>

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___