

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(x)) \cdot (e^x - 1)}{1 - \cos(x)} \quad \text{ב. } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)} \quad \text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$$

$$2. \text{ נביט בפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\cos(x)) + x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

א. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x = 0$? אחרת, איזה סוג אי רציפות יש ב $x = 0$?

ב. לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x = 0$? מהי $f'(0)$ במקרים אלה?

3.

א. מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $\frac{\ln(x)}{x}$ בקטע $[1, e^2]$.

ב. הוכיחו כי לכל $1 < x < e$ מתקיים כי $\frac{\ln^2(x)}{x-1} \leq \frac{2\ln(x)}{x}$.

4.

א. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in \mathbb{R}$ עבורה $c^3 + c = 1$.

ב. הוכיחו כי c יחידה (כלומר, אין שתי נקודות שונות עבורן $x^3 + x = 1$).

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n - 1}$, ותנאי ההתחלה $a_1 = 2$.

א. הוכיחו כי לכל n מתקיים $a_n > 1$.

ב. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

ג. מצאו את $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.