

פתרון בוחן באנליזה

חלק 1: סדרות

שאלה 1

חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^4 + 3n^3 - 2n + 1}{3n^4 + 3n^3 - 2n + 1} \right)^5 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4(6 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4})}{n^4(3 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4})} \right)^5 = \left(\frac{5}{3} \right)^5 = 32 \quad \text{א.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+5} - \sqrt{n})(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+5} + \sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5-n}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1)} \quad \text{ב.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n} \cdot 5}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{\sqrt{n}}}{(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1-1)}{n!(n+1+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} \quad \text{ד.}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $3 < n$

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{3}{n} \leq \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{3}{n} \leq \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} = 4.5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0 \quad \text{ולכן לפי משפט הסנדויץ':}$$

שאלה 2

נתבונן בסדרה המוגדרת ע"י:

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n}$$

$$a_1 = \sqrt{3}$$

- א. הוכיחו כי $\{a_n\}$ מונוטונית עולה
 ב. הסיקו כי $\{a_n\}$ מתכנסת ומצא את גבולה

פתרון

- א. נוכיח ע"י אינדוקציה.
 בדיקה: עבור $n=1$:

$$a_2 = \sqrt{3 + a_1} = \sqrt{3 + \sqrt{3}} > \sqrt{3} = a_1$$

- הנחה: נניח כי עבורו n מסויים: $a_{n+1} > a_n$
 נוכיח כי זה מתקיים עבורו $n+1$ כלומר ש: $a_{n+2} > a_{n+1}$
 הוכחה: $a_{n+2} = \sqrt{3 + a_{n+1}} > \sqrt{3 + a_n} = a_{n+1}$
 ולכן a_n מונוטונית עולה.
 ב. a_n חסומה מלרע ע"י $\sqrt{3}$.
 נוכיח שהיא חסומה מלעיל ע"י 3 ע"י אינדוקציה.
 בדיקה: עבור $n=1$:

$$a_1 = \sqrt{3} < 3$$

- הנחה: נניח כי עבורו n מסויים: $3 > a_n$
 נוכיח כי זה מתקיים עבורו $n+1$ כלומר ש: $3 > a_{n+1}$
 הוכחה: $a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} > 3$
 ולכן a_n חסומה מלעיל ולכן חסומה.
 קיבלנו ש a_n חסומה ומונוטונית ולכן מתכנסת. נמצא את הגבול שלה:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + a_n} = \sqrt{3 + c}$$

$$c = \sqrt{3 + c} \text{ ולכן:}$$

$$c^2 = 3 + c$$

$$0 = c^2 - c - 3$$

$$c = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

הסדרה חיובית ולכן הגבול חיובי ולכן

$$c = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

חלק 2: פונקציות

שאלה 3

האם לפונקציה f קיים הגבול בנקודה $x=2$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x \geq 2 \\ \frac{x}{2} & x < 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x \geq 2 \\ \frac{x}{2} & x < 2 \end{cases}$$

פתרון:

נחשב את הגבולות החד צדדים ונבדוק אם הם שווים:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{2} = 1$$

הגבולות החד צדדים שווים ולכן הגבול קיים (והוא שווה 1).

שאלה 4

חשבו את הגבולות הבאים:

$$א. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

נשתמש במשפט הסנדוויץ':

$$1 = 2 - 1 \leq 2 + \sin\frac{1}{x} \leq 2 + 1 = 3$$

ולכן, עבור $x > 0$ נקבל:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin\frac{1}{x}} \leq 1$$

נכפיל ב- x ונקבל:

$$\frac{x}{3} \leq \frac{x}{2 + \sin\frac{1}{x}} \leq x$$

x פונקציה אלמנטרית ומגדרת ב-0 ומתקיים:

$$x \rightarrow 0, \quad \frac{x}{3} \rightarrow 0$$

ולכן לפי משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)} \quad \text{ב.}$$

פתרון:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{nx} \cdot \frac{\sin(nx)}{1} \cdot \frac{mx}{mx} \cdot \frac{1}{\sin(mx)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{mx} \cdot \frac{\sin(nx)}{nx} \cdot \frac{mx}{\sin(mx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx}{mx} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{n}{m}$$