קמיל

פתרון תרגיל 12

① $\iiint\limits_G xyz\,dV$ כאשר $G=[0,1]\times[2,3]\times[1,2]$

פתרון:

$$\iiint\limits_G xyz\,dV=\int_0^1\int_2^3\int_1^2 xyz\,dz\,dy\,dx=\int_0^1\int_2^3 \frac{xyz^2}{2}\Big|_1^2 dy\,dx=\int_0^1\int_2^3\left(\frac{xy\cdot 4}{2}-\frac{xy}{2}\right)dy\,dx$$

$$=\int_0^1\int_2^3 \frac{3xy}{2}\,dy\,dx=\int_0^1 \frac{3xy^2}{4}\Big|_2^3 dx=\int_0^1\left(\frac{3x\cdot 9}{4}-\frac{3x\cdot 4}{4}\right)dx=\int_0^1\frac{15x}{4}dx=$$

$$\frac{15x^2}{8}\Big|_0^1=\frac{15}{8}=1\tfrac{7}{8}$$

② $$\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^x yz\,dy\,dz\,dx=\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\frac{y^2z}{2}\Big|_0^x dz\,dx=\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\frac{x^2z}{2}dz\,dx=$$

$$\int_0^3\frac{x^2z^2}{4}\Big|_0^{\sqrt{9-x^2}}dx=\int_0^3\frac{x^2(9-x^2)}{4}dx=\int_0^3\frac{9x^2-x^4}{4}dx=\frac{1}{4}\left(3x^3-\frac{x^5}{5}\right)_0^3$$

$$=\frac{1}{4}\left(81-\frac{3^5}{5}\right)=8.1$$

③ חשבו את נפח הגוף הכלוא בין מישורי הצירים למישור $2x+3y+6z=12$.

פתרון: דרוש $\iiint\limits_G 1\,dV$ כאשר G הגוף המתואר.

נמצא את חיתוך המישור עם הצירים:

עם ציר ה x:

$$\begin{cases}2x+3y+6z=12\\ y=z=0\end{cases}\rightarrow 2x=12\rightarrow x=6\qquad (6,0,0)$$

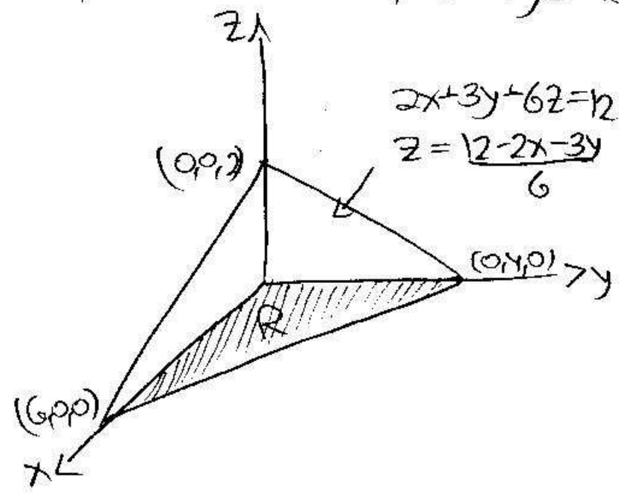
עם ציר ה y:

$$\begin{cases}2x+3y+6z=12\\ x=z=0\end{cases}\rightarrow 3y=12\rightarrow y=4\qquad (0,4,0)$$

עם ציר ה z:

$$\begin{cases}2x+3y+6z=12\\ x=y=0\end{cases}\rightarrow 6z=12\rightarrow z=2\qquad (0,0,2)$$

לכן הגוף הוא פנים הפירמידה

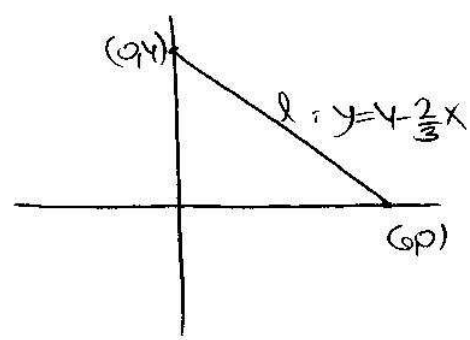


סמנו כבר את R-התחום של מישור xy.

לכן הנפח המבוקש הוא

$$V=\iiint_G 1\,dV=\iint_R\left[\int_0^{\frac{12-2x-3y}{6}} 1\,dz\right]dA$$

נמצא את התחום R של מישור xy:



l הוא ישר החיתוך בין המישור $2x+3y+6z=12$ למישור xy

לכן:

$$l:\begin{cases}2x+3y+6z=12\\ z=0\end{cases} \Rightarrow 2x+3y=12$$

$$3y=12-2x$$

$$l:\ y=4-\tfrac{2}{3}x$$

לכן:

$$V=\iint_R\left[\int_0^{\frac{12-2x-3y}{6}} 1\,dz\right]dA=\int_0^6\int_0^{4-\frac{2}{3}x}\int_0^{2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y} 1\,dz\ dy\,dx=\int_0^6\int_0^{4-\frac{2}{3}x} z\Big|_0^{2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y} dy\,dx$$

$$=\int_0^6\int_0^{4-\frac{2}{3}x}\left(2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)dy\,dx=\int_0^6\left(2y-\frac{1}{3}xy-\frac{1}{4}y^2\right)\Big|_0^{4-\frac{2}{3}x}dx$$

$$= \int_0^6 \left(2\left(4-\frac{2}{3}x\right)-\frac{1}{3}x\left(4-\frac{2}{3}x\right)-\frac{1}{4}\left(4-\frac{2}{3}x\right)^2\right)dx =$$

$$\int_0^6 \left(8-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}x+\frac{2}{9}x^2-\frac{1}{4}\left(16-\frac{16}{3}x+\frac{4}{9}x^2\right)\right)dx =$$

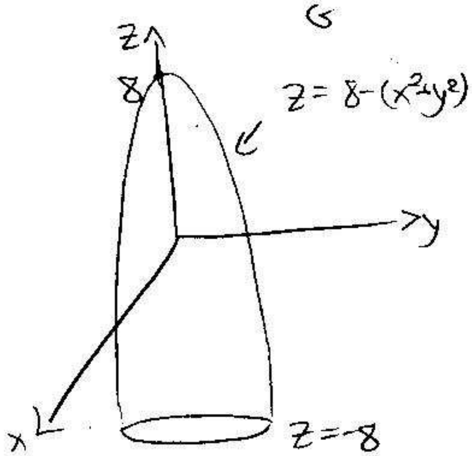
$$\int_0^6 \left(8-\frac{8}{3}x+\frac{2}{9}x^2-4+\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}x^2\right)dx = \int_0^6 \left(4-\frac{4}{3}x+\frac{1}{9}x^2\right)dx$$

$$= \left[4x-\frac{4x^2}{6}+\frac{1}{27}x^3\right]_0^6 = 24-24+8 = 8$$

(4) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה ע"י הפרבולואיד $x^2+y^2=8-z$ ומלמטה ע"י המישור $z=-8$.

פתרון: נחשב $V=\iiint_G 1dV$ של הגוף המתואר G.

ציור:



(את הפרבולואיד ציירנו לפי קווי גובה. לכל z קבוע $x^2+y^2=8-z$ הוא מעגל ברדיוס $\sqrt{8-z}$. עבור $z=8$ נקבל נקודה ועבור $z>8$, $x^2+y^2=8-z<0$ לא מגדיר אף נקודה. עבור $z<8$, ככל ש-z קטן יותר $8-z$ גדול יותר לכן רדיוס המעגל המתאים גדל).

נמצא את היטל הגוף על מישור xy באמצעות מציאת חיתוך הפרבולואיד עם המישור $z=-8$:

$$\begin{cases} x^2+y^2=8-z \\ z=-8 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=16$$

לכן היטל הגוף על מישור xy הוא העיגול $x^2+y^2\le 16$.

לכן:

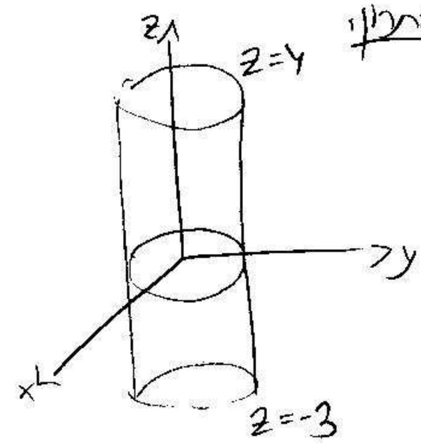
$$V_{\text{הגוף}} = \iiint_G 1dV = \iint_{x^2+y^2\le 16}\left[\int_{-8}^{8-x^2-y^2} 1dz\right]dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 16}\left(8-x^2-y^2-(-8)\right)dxdy$$

נעבור לקואורדינטות פולריות $0\le r\le 4$ ונקבל
$0\le \theta\le 2\pi$

$$=\int_0^4\int_0^{2\pi}(8-r^2+8)\,r\,d\theta\,dr=\int_0^4(16r-r^3)\cdot 2\pi\,dr=2\pi\left[8r^2-\frac{r^4}{4}\right]_0^4=2\pi(128-64)=128\pi$$

(5) חשבו $I=\iiint_G z\,dV$ כאשר G הוא חצי הגליל הכלוא בין $x^2+y^2=16$ והמישורים $z=-3$ ו $z=4$ בתחום $y\ge 0$.

פתרון:



נעבור לקואורדינטות גליליות:

$0\le r\le 4$

$0\le \theta\le \pi$

$-3\le z\le 4$

לכן:

$$I=\int_0^4\int_0^{\pi}\int_{-3}^{4} z\cdot r\,dz\,d\theta\,dr=\int_0^4\int_0^{\pi}\frac{z^2 r}{2}\Big|_{-3}^{4}d\theta\,dr=\int_0^4\int_0^{\pi}\left(\frac{16r}{2}-\frac{9r}{2}\right)d\theta\,dr$$

$$=\int_0^4\pi\cdot\frac{7r}{2}\,dr=\frac{7\pi r^2}{4}\Big|_0^4=\frac{7\pi}{4}\cdot 16=28\pi$$

(6) חשבו $\iiint_G z\,dV$ כאשר G הוא הגליל הכלוא בין $y^2+z^2=1$ והמישורים $x=1$ ו $x=2$.

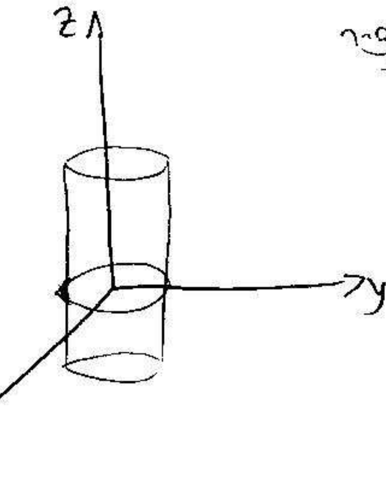
פתרון: נשים לב - אין הבדל בין המשתנים x ו z לכן אם נחליף ביניהם בכל התרגיל (כלומר, בכל מקום שכתוב x נכתוב z ולהפך) לא נשנה את התוצאה.

כלומר, עלינו לחשב $I=\iiint_G x\,dV$ כאשר G הוא הגליל הכלוא בין $y^2+x^2=1$ והמישורים $z=1$ ו $z=2$.

קטע

מעבר לקואורדינטות גליליות

ציור)



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$0 \le r \le 1$
$0 \le \theta \le 2\pi$
$-1 \le z \le 2$

לכן:

$$I = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{2} r\cos\theta \cdot r \, dz\, d\theta\, dr = \int_0^1\int_0^{2\pi} 3r^2\cos\theta \, d\theta\, dr = \int_0^1 3r^2 \sin\theta\Big|_0^{2\pi} dr$$

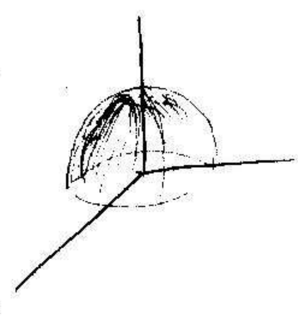
$$= \int_0^1 (0-0)\, dr = 0$$

⑦ חשב $I=\iiint_G 1\, dV$ כאשר G הוא חצי הכדור $x^2+y^2+z^2 \le 25$ עם $z \ge 0$.

פתרון: מכיוון שמדובר בכדור מומלץ מעבר לקואורדינטות כדוריות.
אבל, מכיוון שהתרגיל ניתן לפני שלמדנו קואורדינטות כדוריות נפתור אותו בגליליות.

ההיטל על מישור xy:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 25 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow x^2+y^2 \le 25$$



מישור תחתון: $z=0$.
משטח עליון: $z=+\sqrt{25-(x^2+y^2)}$

לכן:

$$I = \iint_{x^2+y^2\le 25}\left[\int_0^{\sqrt{25-(x^2+y^2)}} 1\, dz\right] dA = \iint_{x^2+y^2 \le 25} \sqrt{25-(x^2+y^2)}\, dA = \int_0^5\int_0^{2\pi} \sqrt{25-r^2}\cdot r\, d\theta\, dr$$

מעבר לקואורדינטות פולריות

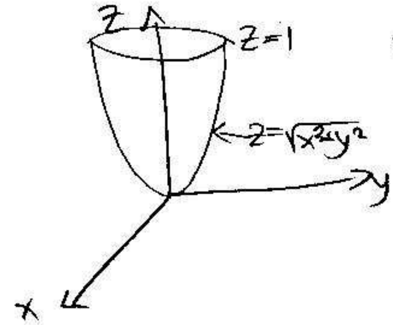
$0 \le r \le 5$
$0 \le \theta \le 2\pi$

$$= \int_0^5 2\pi r\sqrt{25-r^2}\, dr = \int_{25}^{0} (-du)\pi\sqrt{u} = -\frac{\pi u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{25}^{0} = \frac{2\pi\cdot 25^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{250\pi}{3}$$

$u = 25 - r^2$
$du = -2r$
$25 \le u \le 0$

⑧ $\iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\,dV$ כאשר G הוא התחום החסום בין $z=\sqrt{x^2+y^2}$ והמישור $z=1$.

פתרון:



(הציור נעשה באמצעות דוי זוהר).

נמצא את החיתוך של מישור עם באמצעות מציאת החיתוך בין $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ו $z=1$:

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow 1=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2=1$$

לכן:

$$I=\iiint_G \sqrt{x^2+y^2}\,dV=\iint_{x^2+y^2\le1}\left[\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dz\right]dA=\iint_{x^2+y^2\le1}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)z\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}dA$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le1}\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)dA=\int_0^1\int_0^{2\pi} r(1-r)\cdot r\,d\theta\,dr=\int_0^1 2\pi(r^2-r^3)\,dr$$

קואורדינטות פולריות

$0\le r\le1$

$0\le\theta\le2\pi$

$$=2\pi\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1=2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{6}$$

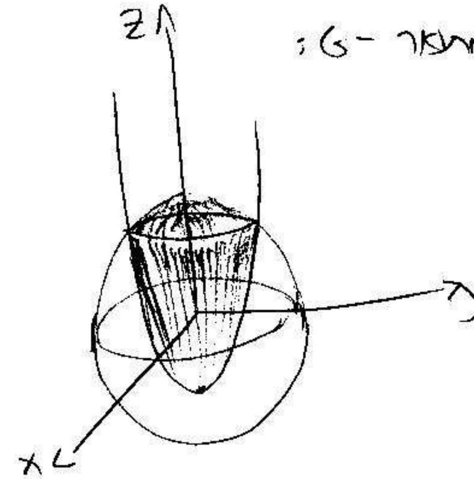
⑨ חשבו את נפח הגוף הכלוא בין הכדור $x^2+y^2+z^2=13$ לבין הפרבולואיד $x^2+y^2=z+1$.

פתרון: נזכר - כדור ברדיוס $\sqrt{13}$

פרבולואיד שהנקודה התחתונה ביותר בו היא $(0,0,-1)$.

המשך

הגוף המתואר - G:



נמצא את התחום של מישור xy באמצעות מציאת החיתוך בין הכדור לפרבולואיד

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=13 \\ x^2+y^2=z+1 \end{cases} \longrightarrow \quad z^2+z+1=13$$

$$z^2+z-12=0$$

$$(z+4)(z-3)=0$$

$$z=-4 \qquad\qquad z=3$$

$$x^2+y^2=-3 \qquad \boxed{x^2+y^2=4}$$

$$\phi$$

לכן: התחום של מישור xy: $x^2+y^2\le 4$

משטח עליון: הכדור $\quad x^2+y^2+z^2=13 \Rightarrow z^2=13-(x^2+y^2)$

$z=+\sqrt{13-(x^2+y^2)}$ (+ מכיוון שאנחנו ב $z\ge 0$)

משטח תחתון: הפרבולואיד $\quad z=x^2+y^2-1$

לכן:

$$V_{\text{הגוף}}=\iiint_G 1\,dV=\iint_{x^2+y^2\le 4}\left[\int_{x^2+y^2-1}^{\sqrt{13-(x^2+y^2)}} 1\,dz\right]dA=\iint_{x^2+y^2\le 4}\left(\sqrt{13-(x^2+y^2)}-(x^2+y^2-1)\right)dA$$

קואורדינטות פולריות
$0\le r\le 2$
$0\le\theta\le 2\pi$

$$=\int_0^2\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{13-r^2}-(r^2-1)\right)r\,d\theta\,dr=\int_0^2 2\pi\left(\sqrt{13-r^2}\cdot r-r^3+r\right)dr$$

$$=\int_0^2 2\pi r\sqrt{13-r^2}\,dr-\frac{2\pi r^4}{4}\Big|_0^2+\frac{\cancel{2}\pi r^2}{\cancel{2}}\Big|_0^2=\int_0^2 2\pi r\sqrt{13-r^2}\,dr-8\pi+4\pi=$$

$$= \int_{13}^{9} -\pi\sqrt{u}\,du - 4\pi = \frac{-\pi u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{13}^{9} - 4\pi = -\frac{2\pi}{3}\cdot 27 + \frac{2\pi}{3}(\sqrt{13})^3 - 4\pi = 9.248\pi$$

$u = 13 - r^2$

$du = -2r\,dr$

$13 \leq u \leq 9$