

קורס 89-113, אביב 2017, מועד א'
מרצים: פרופ' בוריס קוניאבסקי, ד"ר איל קפלן
מתרגלים: אחיה בר-און, עוזי הרוש.

בחינה בקורס אלגברה לינארית 2 למדעי המחשב

משך הבחינה 3 שעות, ללא מחשבוניס או חומר עזר.
אנא ענו על כל השאלות, כל שאלה 25 נקודות.
מחברת הבחינה לא תיבדק!
יש למלא את התשובות המלאות על הטופס, במידת הצורך יש להשתמש בצידו האחורי של הדף. יש לכתוב את התשובה הסופית במקום המיועד לכך.

1. (א) תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

(מטריצה משולשית עליונה, על האלכסון ומעליו 1). מצאו את צורת ז'ורדן של A , כלומר מצאו מטריצה J בצורת ז'ורדן כך ש- $A = J^{-1}AJ$. דומה למטריצה J .

תשובה: $J = \text{-----}$

(ב) תהי $A \in M_2(\mathbb{C})$. לכל $\alpha \in \mathbb{C}$, מצאו את צורת זיורדן של αA .

$$2. \text{ תהי } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

(א) מהו הפולינום האופייני של A ? $p_A = \dots$

(ב) מצאו את הערכים העצמיים של A ולכל ערך עצמי, מצאו ריבוי אלגברי, ריבוי גיאומטרי ורשמו בסיס למרחב העצמי שלו. מלאו את התשובות בטבלה הבאה.

ערך עצמי	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי	בסיס למרחב העצמי

(ג) אם A לכסינה, מצאו P הפיכה ו- D אלכסונית כך ש- $P^{-1}AP = D$. אם לא, הסבירו מדוע.

3. יהי $W \subset V$ מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F ותהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית.

(א) הוכיחו / הפריכו: אם $W \subset V$ תת מרחב אינוריאנטי- T , אז לכל $W_0 \subset W$ תת מרחב, גם W_0 אינוריאנטי- T .

(ב) נניח כי $T - id_V$ נילפוטנטית מאינדקס k (id_V זו העתקת הזהות על V), מצאו את הפירוק הפרימרי של V ביחס להעתקה T (כתבו את המרחב כסכום ישר של גרעינים...).

4. יהי $W = \text{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^4$ מצאו בסיס אורתונורמלי ל- W .
ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תשובה: $b_1 = \dots, b_2 = \dots, b_3 = \dots$.

בהצלחה !