

## ב"א אנליזה 2 תשעט מועד ב

1. חשבו את:

$$\int \frac{\ln(x)}{x(\ln(x)+1)} dx \quad (\text{א})$$

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{x(\ln(x)+1)} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int \frac{t}{t+1} dt = \int \frac{t+1-1}{t+1} dt = \int \left( 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= t - \ln|t+1| + C = \ln(x) - \ln|\ln(x)+1| + C \end{aligned}$$

$$\int \cos(x) \sin(2x) dx \quad (\text{ב})$$

פתרון: מזהות טריגונומטרית ידועה,

$$\cos(x) \sin(2x) = \cos(x) 2 \sin(x) \cos(x)$$

ואז נשתמש בהצבה:

$$\begin{aligned} \int \cos(x) \sin(2x) dx &= 2 \int \cos^2(x) \sin(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x) dx \end{array} \right\} = \\ &= 2 \int -t^2 dt \\ &= -2 \int t^2 dt \\ &= -2 \frac{t^3}{3} + C \\ &= -2 \frac{\cos^3(x)}{3} + C \end{aligned}$$

2.

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ .  
פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה חיובית בכל  $\mathbb{R}$  ולכן אין אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$$

1

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} = 0$$

ולכן  $y = x$  אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{1} = -1$$

1

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{(\sqrt{x^2 + 1} - x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} - x)} = 0$$

ולכן  $y = -x$  אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס  $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$ .

**פתרון**: נמצא את הקדומה  $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$  בעזרת שיטת ההצבה

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2(x)}{2} + C$$

ולכן

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\ln(x)}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln^2(t)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln^2(t)}{2} = \infty$$

ולכן האינטגרל מתבדר.

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{e^t}{1+t} dt}{1 - \cos(x)}$$

**פתרון**: כיוון ש  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{x^2} \frac{e^t}{1+t} dt = 0$  (כיוון ש רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \frac{e^t}{1+t} dt}{1 - \cos(x)} \stackrel{\frac{0}{0}, \text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \frac{e^{(x^2)}}{1+x^2}}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(x^2)}}{1+x^2} = 2 \cdot \frac{e^0}{1+0} = 2$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \cdot \sqrt[n]{e^k}$

**פתרון**: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \cdot \sqrt[n]{e^k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot e^{\frac{k}{n}}$$

ועבור  $f(x) = xe^x$  שהיא רציפה בקטע  $[0, 1]$  נקבל ש

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdot e^{\frac{k}{n}} \rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xe^x dx$$

נחשב את  $\int xe^x dx$  בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} f = x \quad f' = 1 \\ g' = e^x \quad g = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

ולכן

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = (e^1 - e^1) - (0 - 1) = 1$$

.4

(א) חשבו את הסכום  $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots$

**פתרון:** נכתוב עם סיגמה

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

ומכיון ש

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$$

נקבל שהטור שלנו הוא פשוט  $\sin(1)$ .

(ב) קרבו את  $\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$  עד כדי שגיאה של  $\frac{1}{100}$ .

**פתרון:** הטור ההנדסה הוא

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

ואם נציב  $-x$  במקום  $x$  נקבל

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

אינטגרל על שני האגפים (בהסתמך תיאוריה של התכנסות במש של טורים ואינטגרלים איבר איבר) נקבל

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-x)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

לכל  $|x| < 1$  ולכן

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

וזהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל  $k$ , יש את החסם

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right| \leq \left| \frac{(-1)^k}{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \right| = \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

שזהו חסם על השגיאה  $\left| \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right|$  כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ  $\frac{1}{100}$  נחפש  $k$  עבורו  $\frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \leq \frac{1}{100}$ . עבור  $k = 5$  נקבל  $\frac{1}{100} < \frac{1}{4 \cdot 2^4} = \frac{1}{6 \cdot 3^2} < \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^5}$  מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{5-1} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{77}{192}$$

עם שגיאה קטנה מ  $\frac{1}{100}$  כמבוקש.

5. תהא  $f$  פונקציה רציפה ונגדיר את הפונקציה  $g(x) = f(2x)$ .

(א) נניח כי  $a = \int_0^4 f(x) dx$ , חשבו את  $\int_0^2 g(x) dx$ . **פתרון:** נשתמש בשיטת ההצבה:

$$\int_0^4 f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = 2t \\ dx = 2dt \end{array} \right\} = \int_0^2 f(2t) \cdot 2dt = 2 \int_0^2 g(t) dt$$

ולכן

$$\int_0^2 g(t) dt = \frac{\int_0^4 f(x) dx}{2} = \frac{a}{2}$$

(ב) הוכיחו/הפריכו:  $\int_0^x g(t) dt \geq \int_0^x f(t) dt$ . **פתרון:** הפרכה:  $f(x) = -x$  ואז  $g(x) = -2x$  ואז

$$\int_0^x g(t) dt = \int_0^x -2t dt = -t^2 \Big|_0^x = -x^2$$

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x -t dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_0^x = -\frac{x^2}{2}$$

ומתקיים

$$-x^2 \leq -\frac{x^2}{2}$$

ושיוון רק במקרה  $x = 0$ .