

מבחן מועד א' - חדו"א 1 לאודיסאה – 27/01/22

מרצה: דר' ארז שיינר
משך המבחן: שלוש שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק'
ענו על כל השאלות
כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x}-1)\sin(x+\sin(x))}{1-\cos(3x)}$
 ב. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(e^x - 1)$
 ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n! - 2^n}$

2.

א. חשבו את $\int \frac{x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x - 1}{(x-1)(x^2+1)} dx$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס או לא $\int_1^\infty \frac{1}{\ln(e^x-1)} dx$

3.

א. מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה $f(x) = \ln(1+x^2) - 2x \arctan(x)$
 ב. לכל ערך של a , מצאו את כמות הפתרונות של המשוואה $\ln(1+x^2) = 2a \cdot \arctan(x)$

4. תהי פונקציה f כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) > 0$ וכן f רציפה ב- x .

א. הוכיחו/הפריכו: בהכרח קיימת נק' c עבורה $\frac{f(c)}{c} = 1$

ב. הוכיחו כי אם $f(1) = \frac{1}{2}$ קיימת נקודה c בה $\frac{f(c)}{c} = 1$

5. תהי סדרה המקיימת לכל $n \in \mathbb{N}$ כי $a_{n+1} = \frac{5a_n+8}{2a_n+5}$ וכן נתון כי $a_1 = 3$.

א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית יורדת.

ב. חשבו את גבול הסדרה.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sqrt{\frac{1}{n^3}} + \sqrt{\frac{2}{n^3}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n^3}}$$

ב. מצאו מספר רציונאלי $a \in \mathbb{Q}$ המקיים כי

$$\frac{1}{\sqrt{e}} < a < \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{100}$$